

INSTITUTIONEN FÖR VATTENBYGGNAD
TEKNISKA HÖGSKOLAN I LUND

DIVISION OF HYDRAULICS

INSTITUTE OF TECHNOLOGY/UNIVERSITY OF LUND

Modellstudier av cirkulationsprocesser i sjöar

av

LARS BENGTSSON

Bulletin Series A nr 22

Lund 1973

MODELLSTUDIER AV CIRKULATIONSPROCESSER I SJÖAR

av

Lars Bengtsson, civilingenjör

Akademisk avhandling som för avläggande av
teknologie doktorsexamen vid tekniska fa-
kulteten vid universitetet i Lund kommer att
offentligen försvaras å hörsal V:A onsdagen
den 26 september 1973 kl 10.00.

INSTITUTIONEN FÖR VATTENBYGGNAD
TEKNISKA HÖGSKOLAN I LUND

DIVISION OF HYDRAULICS
INSTITUTE OF TECHNOLOGY/UNIVERSITY OF LUND

Modellstudier av cirkulationsprocesser i sjöar

av

LARS BENGTSSON

Bulletin Series A nr 22

Lund 1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026



INNEHÅLL

Förord	sidan	5
Sammanfattning		6
Summary		8
Generella beteckningar		12
1. INLEDNING		13
Litteratur		16
2. VATTENRÖRELSE I SJÖAR		17
Sammanfattning		
.1 Olika cirkulationsprocesser		19
.2 Lokal spridning		20
.3 Densitetsskiktning		20
.4 Vindinducerad strömning		22
.5 Fysikaliska parametrar		23
3. GRUNDLÄGGANDE TEORI		24
Sammanfattning, figur-, tabellista, speciella beteckningar		
.1 Utveckling av de allmänna ekvationerna		26
.1 Basekvationer		26
.2 Turbulent strömning		27
.3 Hydrostatiskt tryck		28
.4 Coriolis parametern		28
.5 Förenklade ekvationer		28
.2 Olika teoretiska beräkningar av den vinddrivna cirkulationen		29
.3 Metod för beräkning av strömmar		31
.1 Integrerade rörelseekvationer		31
.2 Partiella differentialekvationer		32
.3 Horisontell friktion enligt Guldberg-Mohn		33
.4 Randvillkor		33
.5 Dimensionsbetraktelse		33
.6 Lösningsprincip för beräkning av ström- hastigheter		34
Litteratur		35
4. VINDSKJUVKRAFT		37
Sammanfattning, figur-, tabellista, speciella beteckningar		
.1 Teoretiska vindprofiler		39
.1 Rörelsemängdstransport vid vattenytan		39
.2 Neutral luftskiktning		40
.3 Likformighetsteori		40
.4 Generella hastighetsprofiler		42

4.2	Analys av mätresultat från litteraturen	43
.1	Oceanmätningar	43
.2	Mätningar från stora sjöar	44
.3	Mätningar från mindre vattenområden	45
.3	Vindens och vindkraftens fördelning över en sjöyta	46
.1	Mättnings- och utvärderingsförfarande	46
.2	Släpkraftskoefficient för is	47
.3	Mätresultat	48
.4	Resultat	53
.4	Vindskjuvkraft på Vombsjön	53
.1	Mättnings- och utvärderingsförfarande	53
.2	Mätresultat i sjömitt	54
.3	Mätresultat vid stranden	58
.4	Slutresultat	58

Litteratur	60
------------	----

5.	VIRVELVISKOSITET OCH DIFFUSIVITET	62
----	-----------------------------------	----

Sammanfattning, figur-, tabellista, speciella beteckningar

.1	Inledning - begreppsförklaring	65
.2	Turbulent diffusionsteori	65
.1	Diffusionsekvationen	65
.2	Korrelationsfunktioner	66
.3	Samband varians - diffusivitet	68
.4	Relativ diffusion	69
.5	Nya spridningsekvationer	70
.6	Dispersion	70
.7	Inverkan av densitetsskiktning	72
.8	Energifördelning	73
.3	Resultat från litteraturen	74
.1	Horisontella spridningsförsök	74
.2	Horisontella korrelationsstudier	76
.3	Vertikala färgförsök	77
.4	Vertikala korrelationsstudier	78
.4	Horisontella spridningskoefficienter ur färgförsök	78
.1	Mätplatser	78
.2	Utförande	79
.3	Resultat	79
.5	Spridningssimulering	81
.1	Stokastiska spridningsmodeller	81
.2	Teoretiska simuleringar	82
.3	Korrelationsstudier i Yddingen	84
.4	Spridningssimuleringar i Yddingen	86
.6	Vertikala utbyteskoefficienter	88
.1	Färgförsök	88
.2	Strömmättningsförsök	88
.3	Skenbar temperaturdiffusivitet	89

Litteratur	91
------------	----

6. STATIONÄR BAROTROPISK STRÖMNING	93
Sammanfattning, figur-, tabellista, speciella beteckningar	
.1 Teoretiska modeller	96
.1 Utan hänsyn tagen till jordrotation	96
.2 Med hänsyn tagen till jordrotation	97
.3 Med horisontell turbulens	99
.2 Olika faktorerers värde och inverkan	101
.1 Jordrotationen	101
.2 Virvelviskositetens inverkan	101
.3 Virvelviskositetens värde	103
.4 Virvelviskositetens horisontella fördelning	103
.5 Virvelviskositetens vertikala fördelning	104
.6 Horisontell turbulens	106
.3 Modell applicerad på sjön Velen	107
.1 Jämförelse mellan beräknade och mätta strömmar	107
.2 Teoretisk beräkning av strömsituationer	109
.4 Genomströmning förorsakad av in- och utflöde	111
Litteratur	112
7. STATIONÄR BAROKLINISK STRÖMNING	113
Sammanfattning, figur-, tabellista, speciella beteckningar	
.1 Modell i vilken hypolimnion och epilimnion påverkar varandra	115
.1 Två-dimensionell strömning	115
.2 Tre-dimensionell strömning	115
.3 Slutsatser av modellen	116
.2 Modell med dämpad friktion i språngskiktet	117
.1 Epilimnionströmmar	117
.2 Hypolimnionströmmar	118
.3 Övergångszon	120
.4 Skjuvkraftsfördelning	120
.5 Glatt språngskikt	121
.6 Termoklinens lutning	121
.7 Simulerad strömning	122
.3 Skiktad modell applicerad på sjön Velen	123
.1 Jämförelse mellan mätt och beräknad strömsituation	123
.2 Teoretisk strömsituation	125
.3 Slutsatser om den skiktade modellen	125
Litteratur	126
8. ICKE-STATIONÄR STRÖMNING	127
Sammanfattning, figur-, tabellista, speciella beteckningar	
.1 Icke-linjär modell	129
.1 Modellbeskrivning	129
.2 Teoretiska resultat	129

8.2	Analytisk modell	131
.1	Modellbeskrivning	131
.2	Strömningssimulering	133
.3	Förenklat antagande om bottenfriktion	136
	Litteratur	137
9.	SEICHSTRÖMMAR	138
	Sammanfattning, figur-, tabellista, speciella beteckningar	
.1	Teori	140
.2	Observerade svängningar	140
.1	Seichströmmar i hypolimnion	140
.2	Seichströmmar i termoklinen	141
.3	Tvingad svängning	143
	Litteratur	145
10.	TERMOKLINEN	146
	Sammanfattning, figur-, tabellista, speciella beteckningar	
.1	Uppbyggnad av språngskikt	148
.2	Termoklinens nedträngning	148
.1	Teori	148
.2	Fältmätningar	150
.3	Termoklinens nedbrytning	151
	Litteratur	153
11.	SLUTSATSER	154

FÖRORD

Föreliggande avhandling behandlar av vind orsakade strömmingsrörelser i sjöar. För den storskaliga strömmingen har utarbetats matematiska modeller, med vilka strömhastigheter beräknas med hjälp av datamaskin. Utspädningsförloppet av föroreningar studeras. En enkel metod att beräkna språngskiktets läge föreslås.

Initiativtagare till forskningsarbetet är professor Gunnar Lindh. Till honom liksom till hela vattenbyggnadsinstitutionen vid LTH, som inspirerat och uppmuntrat under arbetets gång, vill jag framföra mitt varma tack.

Detta arbete har bedrivits inom det svenska programmet för Internationella Hydrologiska Dekaden. Till samtliga deltagare i projektet Sjöars Hydrologi och då särskilt till dess ledare fil.lic. Malin Falkenmark ber jag att få framföra ett tack för många intressanta och givande diskussioner.

Lund i juni 1973

Lars Bengtsson

SAMMANFATTNING

Denna avhandling behandlar cirkulationsprocesser i sjöar. 1) Med matematiska modeller kan strömmar förorsakade av vinden bestämmas. 2) Med stokastiska modeller kan utspädningsförlopp simuleras. 3) Utifrån vind-data kan termoklinens nedträngning direkt bestämmas. 4) Stående inre svängningar kan beräknas ur välkända teoretiska formler.

Med kännedom om en sjös bottenkonfiguration samt vindförhållandena kan strömmarna i godtyckliga punkter i sjön simuleras. En barotropisk modell användes för att simulera strömmarna under vinterhalvåret. Sedan ett språngskikt utbildas simuleras strömmarna bättre med en baroklinisk modell. Hur strömförhållandena ändras vid förändringar av en sjös botten-topografi, kan studeras med modellerna för vindinducerad strömning. Hur utspädningsförhållandena ändras kan studeras med en stokastisk modell.

Vindeirkulationsmodellerna är gjorda för två- eller oskiktade vattenmassor. Hänsyn togs till vattenytans lutning, jordrotationen samt turbulensen. För att få en analogi till laminär strömning infördes virvelviskositet som "mått" på turbulensen. De allmänna rörelseekvationerna integreras i vertikal riktning. Randvillkor är den av vinden orsakade skjuvkraften på vattenytan samt känd bottenfriktion eller i vissa fall försvinnande strömhastigheter vid botten. Med hjälp av strömfunktioner överföres strömningsproblemet på tvådimensionell form. Trycktermerna elimineras genom derivering, och för strömfunktionerna erhålles en partiell differentialekvation. Ur kända strömfunktioner beräknas sedan tryckgradienterna och med hjälp av dessa strömhastigheterna.

Skjuvkraften på vattenytan måste beräknas i modellerna. Intensiva mätningar över Vombsjön antyder, att vindkraften är proportionell mot vindhastigheten i kvadrat. Släpfastkoefficienten är oberoende av luftskiktning och vindstyrka cirka $1,2 \cdot 10^{-3}$. Skjuvkraftens fördelning över sjöytan inverkar på cirkulationsmönstret. Vid mätningar över Velen, när denna var frusen, befanns såväl vind som vindskjuvkraft vara jämnt fördelade över hela sjön.

Den vertikala virvelviskositeten är den viktigaste parametern. Den bestämmer hela strömningsmönstret. Om virvelviskositeten är liten, blir strömmarna i ytan starka och kraftigt påverkade av jordrotationen men dör ut snabbt med ökat djup. Modellstudier, färgutsläppsmätningar och strömmätningar pekar på, att den vertikala virvelviskositeten är proportionell mot vindstyrkan och mot språngskiktsdjupet. Proportionalitetskonstanten är cirka $2 \cdot 10^{-5}$.

I regel användes ett konstant virvelviskositetsvärde i modellerna, trots att virvelviskositeten egentligen är en funktion av såväl tiden som rumskoordinaterna. Jämförelser med mätta strömmar visar emellertid, att genomsnittsförhållanden kan beskrivas med konstant virvelviskositet.

Genom studium av de teoretiska modellerna finner man, att den horisontella friktionen föga påverkar strömningen. Denna friktionsterm verkar dämpande vid accelererande strömning och verkar utjämnande på strömmarnas fördelning vid stränderna.

Upprepade momentana färgutsläpp ger oberoende av vinden konstanta diffusiviteter i longitudinell och lateral riktning: $250 \text{ cm}^2/\text{s}$ resp. $30 \text{ cm}^2/\text{s}$ i Vombsjön och Mien, $600 \text{ cm}^2/\text{s}$ resp. $60 \text{ cm}^2/\text{s}$ i Yddingen.

Den turbulenta spridningen kan simuleras med stokastiska modeller, i vilka hänsyn tas till korrelationen mellan hastighetsfluktuationer i olika riktningar, vid olika tidpunkter och på olika avstånd. De horisontella fluktuationerna, tidskorrelationsfunktioner, avståndsfunktioner och horisontell riktningskorrelation har bestämts i Yddingen genom utsläpp med 1 minuts intervall av nästan helt vattenfyllda flaskor. En turbulent tidsskala av 1-2 min och en längdskala av 1 m har kunnat uppskattas. Eftersom avståndskorrelationen var mycket liten, kunde spridningen simuleras med en modell, som tog hänsyn endast till korrelationen mellan fluktuationer vid olika tidpunkter. I medeltal erhöles diffusiviteter 180 cm²/s (longitudinellt) och 60 cm²/s (lateralt).

En stationär barotropisk modell har applicerats på sjön Velen. Ytströmmarna i modellen stämde överens med de uppmätta strömmarna. Med ökat djup vred strömmarna åt vänster. Även strömmarna på 4 m djup stämde med verkligheten. Modellen visade, att en returström gick fram längs västra stranden, vilket bekräftades av fältmätningarna.

I den tvåskiktade modellen betraktas termoklinen som en glatt diskontinuitetsyta. Även den skiktade modellen har applicerats på Velen. Modellströmmar och mätta strömmar stämde väl i epilimnion.

Såväl en analytisk som en differensmodell av den icke-stationära strömningen har utarbetats. I båda fallen löses först strömfunktioner ut genom iterativa beräkningar. I differensmodellen bestäms strömhastigheterna genom iteration i tre dimensioner. I den analytiska modellen erhålles strömhastigheterna genom att tidsberoendet elimineras med hjälp av Fourier serier eller Laplace transformers.

Vattenytan verkar nästan omedelbart ställa in sig i det läge, som motsvarar fortvarighetstillståndet för en viss vind. Strömmarna blir stationära inom någon timme. Stationaritetstiden ökar med ökat djup.

Med differensmodellen kan den relativa betydelsen av olika termer studeras. De helt dominerande termerna är vid stränderna tryckgradienten, den vertikala turbulensen och den relativa accelerationen. Ute i själva sjön tillkommer dessutom Coriolis accelerationen.

I Velen kan man observera hur termoklinen oscillerar. Dessa inre svängningar kan beräknas ur klassiska teorier. Om språngskiktet ligger för lågt, under 7 m, krävs en periodicitet hos vinden för att svängningar skall uppstå. Om temperaturfallet över termoklinen inte är skarpt, svänger termoklinens övre och undre yta inte i fas, varför strömmar uppstår inom termoklinen. Strömhastigheter upp till 3 cm/s kan beräknas ur Velen-data.

I den skiktade modellen behöver man känna språngskiktets läge. Sedan språngskiktet väl utbildats, kan man under hela sommarperioden beräkna dess läge enbart utifrån vinddata. En del av den från vinden till sjön överförda rörelseenergin tänkes omvandlad till potentiell energi. Detta energitillskott finnes per tids- och ytenhet vara 0,17 · skjuvkraft · vindhastighet. En nedträngningshastighet kan beräknas. Beräknat och observerat språngskiktsdjup stämmer väl under somrarna 1970 och -71.

Förhållandena vid språngskiktets nedbrytning på hösten har studerats. När temperaturdifferensen mellan epilimnion och hypolimnion understiger 6°C, kan så svaga vindar som 6 m/s bryta ner språngskiktet.

SUMMARY

MODELS OF CIRCULATION IN LAKES

by

Lars G. Bengtsson

This dissertation deals with methods of computation of circulation processes in lakes as follows: 1) Mathematical models for the determination of currents induced by the wind; 2) Stochastic models for the simulation of dispersion; 3) Processes for determining the entrainment of the thermocline from wind data; and 4) Estimation of the internal oscillations by well-known theoretical formulas.

If the bottom topography of a lake is known, the currents due to almost any typical meteorological situation can be simulated. In the late Autumn, in the Winter and in the early Spring the currents are simulated best with a barotropic model. Once the thermocline is well-developed, the currents are more appropriately simulated with a baroclinic model. The depth of the thermocline must be known in this model. As noted later the downward movement of the thermocline was found to be determinable from wind data.

Information about the effect of changes of the bottom topography can be obtained with the mathematical models of wind induced circulation. For example, a deposit may give rise to shear and an increase of the horizontal dispersion. The dispersion under these new conditions can be simulated with a stochastic model in which the shear is incorporated.

The steady state and transient, wind-driven currents of a homogeneous or two-layered lake were studied by means of solutions of the equations of fluid motion. If wind blows over a lake, wind-driven currents are produced by transfer of momentum from wind to water and by friction between moving layers within the water. In solving the equations of motion, the rotation of the earth, the inclination of the water surface and the turbulence were taken into account. The turbulence was introduced by using the concept of eddy viscosity in the vertical direction and by using a coefficient of friction in the horizontal direction. Since the vertical scale of a lake is generally much smaller than the horizontal scale the equation of motion in the vertical direction reduces to the hydrostatic pressure equation. The boundary conditions within a vertical are the known wind stress on the surface, and zero velocity along the bottom. The equations of motion in the two horizontal directions were integrated in the vertical, and the pressure was eliminated by differentiation. For steady state conditions a stream function, which satisfies the vertically integrated continuity condition, could be introduced and a partial differential equation of the stream functions, which can be solved on a digital computer, was obtained. Throughflow may be taken into account in the boundary conditions. Once the stream functions were known, the pressure gradients were computed and from the pressure gradients the stream velocities were found. The solutions yielded the three dimensional circulation pattern of a lake of arbitrary bottom topography and arbitrary plan configuration.

The tangential force exerted by the wind on the surface of the water must be estimated in adapting the models to a particular situation. The relationship between the wind stress at the air-water interface and the wind speed is not known with the desired degree of accuracy. The wind stress depends among other things on the vertical stability of the air immediately above the water surface.

Intense measurements have been carried out on Lake Vomb. The exchange-coefficient hypothesis was utilized for determining turbulent transfer from average vertical profiles of wind and temperature. The wind stress was found to be proportional to the square of the wind speed. The drag coefficient was found to have a value of about $1.2 \cdot 10^{-3}$, and to be independent of the stratification of the air and of the wind speed. From a literature survey, the drag coefficient values for relatively enclosed waters were found to average about $1.0 \cdot 10^{-3}$.

To determine the circulation pattern in a lake it is necessary to know also the plan distribution of the wind stress. When Lake Velen was ice covered, wind profiles were measured at different points on the lake. The distributions of the wind and the stress were found to be almost even over the whole lake. The drag coefficient for ice was estimated at $1.0 \cdot 10^{-3}$.

The eddy viscosity is the most important parameter in the models. While the wind stress only affects the magnitude of the currents the eddy viscosity affects the whole circulation pattern. A low eddy viscosity produces shallow surface currents of relatively high magnitude while with higher eddy viscosity the shear penetrates deeper into the water.

A value of $10 \text{ cm}^2/\text{s}$ was estimated for the vertical diffusivity from repeated dye injections. Wind stresses over a water surface were estimated from measured wind- and temperature profiles. The stream velocity profile near the surface was measured with the aid of small drogues. Then by using an analogy to Newton's law of viscosity, the eddy viscosity could be determined. Currents simulated with one of the theoretical models were compared with measured currents. The best fit was assumed to be associated with the correct value of the eddy viscosity. All the investigations suggested that the eddy viscosity was proportional to the wind speed and to the depth of the lake, with a constant of proportionality of $2 \cdot 10^{-5}$.

A constant eddy viscosity was generally employed in the models, although actually the eddy viscosity is a function of time and of all the three space coordinates. This is the main weakness of the models. However, comparison with measured currents showed that mean states can be adequately described using a constant eddy viscosity. The influence of different distributions of the eddy viscosity was studied with a special model.

From the theoretical models it was found that the horizontal friction has only a small influence on the circulation. The horizontal friction term is of importance only in the vicinity of the shoreline, and for time-dependent circulation. The horizontal friction has a damping effect and makes the currents more evenly distributed.

A literature survey revealed that in lakes the effective turbulence scales are 1 km and 10 m, and that there are no intermediate effective scales. From investigations of dispersion of small dye patches the following low values of diffusivities in the longitudinal and lateral directions were found: $250 \text{ cm}^2/\text{s}$ and $30 \text{ cm}^2/\text{s}$, respectively, in Lake Vomb and Lake Mien, and $600 \text{ cm}^2/\text{s}$ and $60 \text{ cm}^2/\text{s}$ in Lake Yddingen.

The rate of dispersion in Lake Yddingen was determined also in another way. Partially water filled bottles were released at intervals of one minute. The time for a bottle to travel 3 m was noted. Each series consisted of at least 30 bottles. Horizontal velocity fluctuations, as well as space- and temporal correlations could be estimated. The Eulerian length scale was found to be about 1 m and the time scale 1-2 minutes. Since the space correlation turned out to be small, the dispersion could be simulated with a stochastic model that only included temporal correlation. The dispersion of 1000 particles was simulated for the 23 series run. The computed diffusivities ranged from 20 to 1000 cm^2/s , the average values being 180 cm^2/s in the longitudinal and 60 cm^2/s in the lateral directions. The effect of shear can be taken into account in the stochastic model.

A stationary barotropic model was applied to Lake Velen. The water masses were almost homogeneous. The wind was WSW 5 m/s. With a drag coefficient of $1.1 \cdot 10^{-3}$ the stress was estimated at 0.35 dyn/cm^2 and the eddy viscosity was estimated at 15 cm^2/s . Both model and measurements showed surface currents of about 8 cm/s in a NNE direction. The computed currents as well as those measured turned to the left with increasing depth. The measurements showed a shallow return current along the western coast, which was reproduced approximately in the model.

In the two-layered model, the thermocline was regarded as frictionless, since strong stable stratification inhibits vertical mixing. Transport of momentum was assumed to take place only where the thermocline touches the bottom.

The two-layered model was also tested with data from Lake Velen. The wind was blowing from the south at low speed. Comparison between simulated and measured currents at the depth of 2 m showed good agreement. Even a re-curling current, measured in the southern basin, was simulated by the model. Just below the thermocline the currents were very nonhomogeneous, and were not very well described by the model.

An analytical as well as a finite difference model of the time-dependent circulation was developed. The stream functions, which can only be defined to satisfy the continuity condition if the water is homogeneous, were found by finite difference iteration as in the steady state models. The pressure gradients were assumed to be constant during a time-step, and were evaluated from the integrated equations of motion, in which the bottom friction was determined one time-step back. In the finite difference model the solutions of the stream velocities were found by iteration in three dimensions. The analytical solutions for the velocities were obtained by removing the time-dependence by the use of Fourier series or a Laplace transform.

The surface elevation seems to react almost instantly to changes of the wind stress. The currents reach the steady state within some hours. The time for a lake to reach a stationary state increases with increasing depth.

The difference model allows the relative importance of different terms in the equation of motion to be studied. By far, the dominant terms along the shores are the pressure gradients, the vertical turbulence and the relative acceleration. In the central part of the lake the Coriolis acceleration gains importance.

In Lake Velen oscillations of the thermocline may be observed. The density difference across the thermocline and the dimensions of the lake should give an oscillation period of about 20 hours, as observed. This is very close to the diurnal period of wind speeds; therefore it was difficult to determine whether the oscillations of the thermocline are free or forced. If the thermocline is situated below 7 m, friction against the bottom probably balances the inertial forces of the internal movements and an expected internal wave will be damped out. The horizontal displacements of water masses connected with oscillations imply currents of 1.8 cm/s in the hypolimnion.

If the upper and lower boundaries of the thermocline layer do not oscillate in phase, currents will be produced within the thermocline. A phase delay of 6 hours has been observed in Lake Velen. From the measured period of almost 24 hours, and the amplitudes, a current of 3 cm/s was calculated.

When the thermocline is well-developed, it acts as an effective barrier to the transport of heat, mass and momentum. Strong currents of the epilimnion can, however, drag some of the water masses of the hypolimnion, and there will be a downward entrainment of warmer water. Part of the kinetic energy that a lake gains from the wind is assumed to be converted into potential energy by displacing the thermocline downwards. The velocity with which this takes place is then proportional to the cube of the wind speed and inversely proportional to the depth of the thermocline and to the density difference across the thermocline. The observed long-term movements in Lake Velen for the entire summer period of 1970 were compared with those computed. For periods of one week a mean constant of proportionality of 0.17 was found. With this constant, the downward motion of the thermocline in 1971 was well described.

The cooling of the water surface during the Autumn gives rise to a gradually decreasing temperature difference between the epilimnion and the hypolimnion until the stratification becomes so weak that it can be broken down by the influence of the wind. Windy days during the Autumns of 1969-70-71 were investigated. The breakdown could not be related directly to a Froude number. With a temperature difference of at least 7°C, an effective diffusion barrier is formed, but with a temperature difference of 6°C the stratification will be broken down if the wind speed exceeds 6 m/s.

GENERELLA BETECKNINGAR

B	= som index: botten
C_D	= släpkraktskoefficient, eventuellt siffervärde som index anger den nivå till vilken vindhastigheten skall refereras.
f	= Coriolis parametern $\approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
g	= tyngdaccelerationen
h	= skiktådjup
h	= som index: nivån h
H	= som index: horisontell
i, j	= index för riktning
k	= horisontell friktionskoefficient (s^{-1})
$k_{x,y,z}$	= turbulent temperatordiffusivitet i riktning x, y, z
l_p	= Prandtls blandningslängd
LO	= som index: longitudinell
LA	= som index: lateral
p	= tryck
t	= tid
T	= absolut temperatur. Primmad term anger fluktuation.
u, v, w	= strömhastigheter i riktningarna x, y, z. Primmade termer anger fluktuationer. Index 0 står för z = 0. v med index betecknar generell hastighet.
U, V	= vertikalt integrerade strömhastigheter = volymflöde per breddenhet
W	= vindhastighet. Eventuellt index anger mätnivå i m.
x, y, z	= avståndskoordinater mot ost, norr, uppåt. x med index anger generellt avstånd.
η	= vattenytans ändring från horisontalplanet
τ	= skjuvspänning i vertikalplanet med index för riktning och nivå. Utan nivåindex avses vattenytan.
ρ	= vattnets densitet
ρ_{air}	= luftens densitet
ψ	= strömfunktion, volymflöde
ν	= vattnets virvelviskositet, utan index i vertikal riktning
0	= som index: nivån z = 0
(-)	= medelvärde
($_$)	= $\left(\left(_ \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ = standardavvikelse
($\vec{_}$)	= vektorbeteckning
$\nabla \cdot$	= divergensoperator
∇^2	= Laplaceoperator
∇_H^2	= horisontell Laplaceoperator
∇^4	= $\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

Inom varje kapitel finns dessutom speciella beteckningar.

Litteraturförteckning

Varje kapitel har egna litteraturreferenser. Referens med enkel siffra anger litteratur tillhörande kapitlet i fråga, medan referens med dubbel siffra t.ex. Phillips [1.4] anger, att litteraturreferensen står som nr 4 i kapitel 1.

Sammanfattning

Varje kapitel sammanfattas i en kort abstract.

Kapitel 1. INLEDNING

Det är önskvärt att på ett enkelt sätt kunna förutsäga hur vattenmassorna i en sjö cirkulerar. Man vill veta, hur en sjö reagerar för vissa yttre förhållanden. Hur stort är vattenutbytet mellan en vik och själva sjön? Cirkulerar allt vattnet i sjön eller bara vissa delar? Hur kommer utbyggnaden av t.ex. en pir att inverka på cirkulationen? I vilken riktning, och hur fort sker den slutliga borttransporten från ett utsläpp? Hur sprids en partikel i förhållande till partiklar i dess grannskap, d.v.s. hur stor är utspädningseffekten? Ju större hastighetsgradienter som finns desto snabbare sker utspädningen och över desto större volym sprids föroreningar.

Kontinuitetsekvationen samt tillståndsekvationen beskriver tillsammans med Navier-Stokes ekvationer rörelser i atmosfären och i oceaner och sjöar. Processer, som inträffar vid stränder, får större betydelse i sjöar än i oceaner. Effekter såsom variationer i lufttrycket och tidvattenrörelser kan försummas i sjöar. Den ströminducerande mekanismen i en sjö är framför allt vinden. Densitetsströmmar och stående svängningar är en följd av den omblandning av vattenmassorna, som vinden orsakat.

Datamaskinernas tillkomst har gjort det möjligt att beskriva vattenmassornas cirkulation på teoretisk väg. De sista åren har modeller av vattenmassornas cirkulation i de Stora sjöarna i Nordamerika utarbetats, se t.ex. Platzman [5]. De beskriver emellertid i regel masstransporten och tar således inte hänsyn till på vilka nivåer, som vattenmassorna rör sig.

Det banbrytande steget till en lösning av oceanernas cirkulation togs av Ekman [1]. Han införde friktionskrafter, som antogs orsakade av de vertikalt skjuvande krafterna. Härvid uppstår vertikala hastighetsgradienter, och man kan bestämma på vilka nivåer, som vattnet strömmar. Olikheter i hastighetsfältet ökar vattnets spridande förmåga. Kännedom om hastighetsgradienter behövs för att bestämma utspädningen av en förorening.

Hur avancerad en modell än är, behövs korrekta input-data. För att bygga upp en matematisk strömningsmodell krävs kännedom om de verkande fysikaliska mekanismerna. Bristande kunskaper om turbulensens omblandande effekt gör, att teoretiska omblandningskoefficienter som diffusivitet och virvelviskositet måste användas. Dessa koefficienter är i själva verket variabler, och de varierar på ett obekant sätt med vind, djup och skiktningförhållanden.

Den ursprungliga avsikten med föreliggande arbete var att utarbeta en matematisk modell, som kunde beskriva den storskaliga cirkulationen i en godtycklig sjö. Input-data skulle därvid vara vindens styrka och sjöns bottenkonfiguration. Sådana modeller, vilka tar hänsyn till vattenytans lutning, jordens rotation samt vertikal och horisontell turbulent omblandning presenteras längre fram.

Efterhand som modellarbetet framskred, blev det klart att den inre omblandningen måste närmare studeras. Turbulent diffusion brukar beskrivas med diffusionsekvationen eller "4/3-lagen". Om man känner sambandet mellan hastighetsfluktuationen vid olika tidpunkter och i olika riktningar, torde det vara möjligt att med en stokastisk modell simulera ett utspädningsförlopp.

Skiktningförhållandena i en vattenmassa kan vara sådana, att inre svängningar uppstår. Dessa seichströmmar kan enkelt studeras i en parallelepipedisk sjö. För en långsmal sjö med godtycklig bottenform måste en form av medeldjup användas. Svängningarna dämpas av inre friktion och störs på olika sätt genom vindens inverkan.

Under sommarperioden brukar en någorlunda djup sjö vara markant tvåskiktad. Vinden blandar om skiktet närmast vattenytan. Det uppkomna språngskiktet verkar som en diffusionsspärr. Språngskiktet kan dock sjunka nedåt p.g.a. rörelseenergitillskott från kraftiga vindar.

De flesta fältmätningar i denna avhandling har utförts i sjön Velen genom IHD:s sjögrupps försorg. En djupkarta över sjön visas i figur 1.1. I mätpunkterna N,R,A,S har temperaturregistreringar skett var 10 minut på varje meters nivå.

Djupkarta över sjön Velen.

Isobaternas ekvidistans 2 m.



Fig. 1.1 Sjön Velen (N, R, A och S är mätpunkter)
Lake Velen (N, R, A and S are measuring positions)

Litteratur

1. Ekman, V.W. [1905]. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. - Arkiv för matematik, Astronomi och Fysik 2 (11), p. 1-52.
2. Hutchinson, G.E. [1957]. A treatise on limnology. - John Wiley & Sons, London. Vol. I.
3. Neuman, G. [1968]. Ocean currents. - Elsevier Pub. Comp., Amsterdam.
4. Phillips, O.M. [1969]. The dynamics of the upper ocean. - Cambridge University Press.
5. Platzman, G.W. [1963]. The dynamical prediction of wind tides on Lake Erie. - Met. Monographs, Amer. Met. Soc. 4 (26), p. 1-43.

Kapitel 2. VATTENRÖRELSE I SJÖAR

- 2.1 Olika cirkulationsprocesser
- 2.2 Lokal spridning
- 2.3 Densitetsskiktning
- 2.4 Vindinducerad strömning
- 2.5 Fysikaliska parametrar

Sammanfattning

De viktigaste cirkulationsprocesserna orsakas av vinden. Vattenmassorna i sjön Velen är endera tvåskiktade eller nästan homoterma. Vinden verkar med en skjuvande kraft på vattenytan. Ytströmmarna motverkas av gravitationskraften p.g.a. vattenytans lutning. Rörelsemängd transporteras genom turbulensens inverkan ner i vattenmassorna. Bottenfriktionen retarderar strömmarna.

- Figurer 2.1 Principen för geostrofisk strömning
The principle of geostrophic flow
- .2 Temperaturens variation under året (värden från 1969/70/71)
i sjön Velen på djupen 2 m och 14 m
Seasonal variation of temperature (values from 1969/70/71)
in Lake Velen at the depths 2 m and 14 m
- .3 Normal sommarskiktning i Velen
Normal Summer stratification in Lake Velen
- .4 Principen för vindinducerad strömning
The principle of wind-driven circulation
- .5 Kraftsituation i den horisontella vattenytans plan
The forces at the water surface

2.1 Olika cirkulationsprocesser

Vattenmassorna i en sjö kan bringas i cirkulation av en rad mekanismer. De direkt ströminducerande mekanismerna är

- A 1. vinden - från vilken rörelsemängd överföres till vattenytan.
- A 2. månen och solens dragningskraft (tidvatten).
- A 3. olikartade förändringar av luftens atmosfärstryck över sjön - vattenytan vill ställa sig högre i den del av sjön, över vilken ett lågtryck framkallas (och omvänt).
- A 4. genomströmningen - en älv tränger in i en sjö och för med sig omgivande vattenmassor.
- A 5. ytvakylning eller på vintern ytoppvärmning, vilket ger upphov till konvektionsströmmar - tungt vatten sjunker mot botten.

Strömningstyperna A 2 och A 3 förekommer enbart i mycket stora sjöar. Genomströmningen A 4, är i regel liten, men kan i annat fall studeras med jetstråleteorin. Konvektionsströmning, A 5, är en snabb och effektiv omblandning, som endast förekommer under kort tid. Strömmar inducerade av vinden, A 1, är i regel dominerande.

Strömmar kan också uppstå på grund av indirekta orsaker. Dessa strömningstyper måste initieras av någon yttre mekanism.

- B 1. Vinden eller soluppvärmningen kan inverka så, att trycklinjerna (isobarerna) inte blir parallella med densitetslinjerna (isopycnerna). Vattenmassorna säges då befinna sig i ett barokliniskt tillstånd. Eftersom detta är ett instabilt tillstånd, så rör sig vattenmassorna. En densitetsströmning uppstår.
- B 2. När en vind slutat verka på en sjöyta, strävar naturligtvis vattenytan efter att intaga sitt jämviktsläge. Innan vattenmassorna kommer i vila svänger nivåytorna kring sina vilolägen. Denna oscillerande rörelse ger upphov till seichströmmar.

Strömmarna i en sjö orsakas inte av men modifieras av

- C 1. densitetsskiktning - som kan orsaka baroklinisk strömning enligt B 1 och som verkar dämpande på turbulensen.
- C 2. den inre friktionen - som verkar så fort någon rörelse uppstår. Den kinetiska energin i vattenströmmarna omvandlas p.g.a. turbulent virlar till värme.
- C 3. bottenfriktionen - som liksom den inre friktionen uppstår vid en strömmingsrörelse, verkar retarderande på strömmarna. Störningar av strömningen vid botten kan ge upphov till intensivare turbulens.
- C 4. jordens rotation - vars inverkan gör, att en partikel i rörelse på norra halvan av jordklotet vrids åt höger.

Eftersom ett på jorden fixt koordinatsystem inte är ett inertialsystem påverkas en partikel av den s.k. Coriolisaccelerationen. Effekten av Coriolisaccelerationen framgår tydligast vid geostrofiska strömmar. Tryckgradientkraften och Corioliskraften balanserar då varandra i princip enligt fig. 2.1. Corioliskraften verkar på norra jordklotet alltid åt höger vinkelrät mot partikelbanan.

Vinden initierar vågor. I vågorna rör sig vattenpartiklar i slutna banor nära ytan. Endast brytande vågor vid stränderna torde påverka cirkulationen i en sjö. Turbulensen blir då mycket intensiv, och bottenfriktionen blir stor. Vågor i en sjö brukar dock inte bryta. I den följande framställningen tages inte hänsyn till inverkan av vågor.

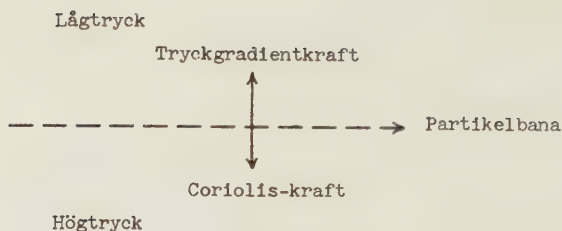


Fig. 2.1 Principen för geostrofisk strömning

2.2 Lokal spridning

Även om hela sjöns vattenmassa är helt stillastående, så sker genom de molekylära rörelserna en spridning eller, om någon förorening finns, en koncentrationstspädning. Denna spridning intensifieras vid turbulenta förhållanden, s.k. turbulent diffusion. Spridningen kan tänkas ske relativt en partikel, som följer med huvudströmmen. Om laterala (horisontella, vinkelräta mot strömmen) eller vertikala hastighetsgradienter förekommer, så sprids föroreningarna över en större volym.

2.3 Densitetsskiktning

Densitetsskiktningen bestämmer till stor del strömningsförhållandena i en sjö. I grunda vindexponerade sjöar är vattenmassorna större delen av året homoterma. I djupare sjöar är i vårt klimatområde densitetsskiktningen i regel sådan, att två cirkulationsperioder per år förekommer. Under cirka en månad på våren och två månader på hösten är hela vattenmassan homogen.

På vintern sjunker det varmare tyngre vattnet mot botten och åstadkommer en ganska svag omvänd skiktning. Förhållandena blir då nästan homoterma. Detta framgår av figur 2.2, i vilken temperaturen i sjön Velen på 2 m och 14 m:s djup är ritade som funktion av årstiden.

Under sommarmånaderna och den tidiga hösten är vattenmassorna i regel tydligt tvåskiktade. Den övre vattenmassan, epilimnion, skiljs från den undre vattenmassan, hypolimnium, av ett skarpt språngskikt, termoklinen eller metalimnion skiktet. I figur 2.2 ses, att ungefär tvåskiktade förhållanden råder från 1 juni till in i mitten av september. Från oktober och fram till i mitten av maj är sjön i det närmaste homogen. Endast under två fjortondagarsperioder är skiktningförhållandena mera komplicerade.

En normal sommarskiktning för sjön Velen visas i figur 2.3. Just denna densitetsfördelning råder från mitten på sommaren (15/7) och ända in i september månad (15/9). Ett markerat språngskikt, som gradvis drivs neråt, förekommer redan från 1 juni.

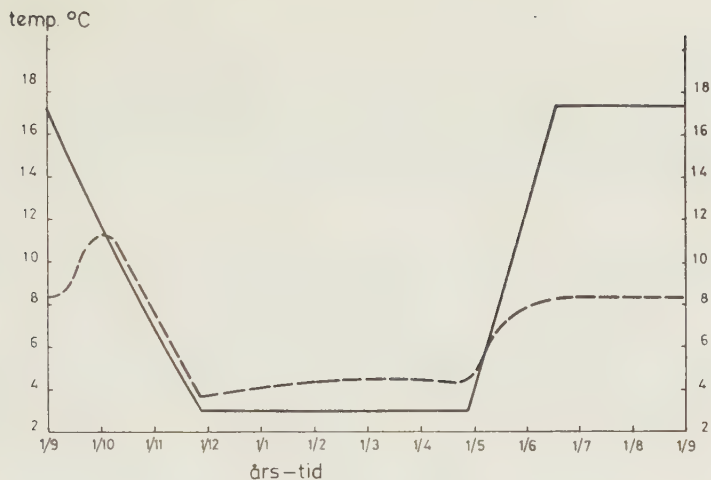


Fig. 2.2 Temperaturens variation under året (värden från 1969/70/71) i sjön Velen på djupen 2 m och 14 m (streckad linje).

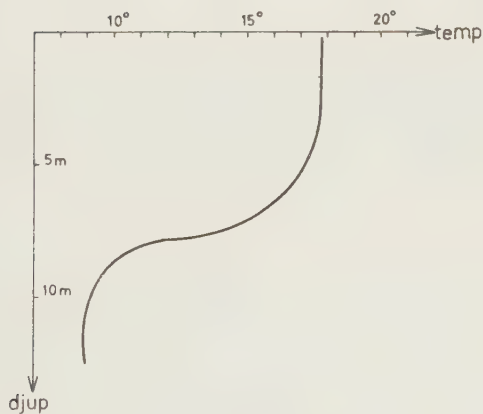


Fig. 2.3 Normal sommarskiktning i sjön Velen.

2.4 Vindinducerad strömning

När en vind blåser över en sjö, utövar den en skjuvande kraft på vattenytan. Rörelsemängd överförs från vinden till vattenytan och transporteras genom viskositetens och turbulensens inverkan ner i vattnet. Förloppet klargöres av fig. 2.4. Vid botten retarderas strömmar av bottenfriktionen.



Fig. 2.4 Principen för vindinducerad strömning

τ = vindskjuvkraft

T_B = bottenfriktion

P = gravitationskraft

Fram tills stationärt tillstånd uppnåtts transporteras vattenmassa i vindens riktning, så att vattenytan snedställs. Gravitationskraften strävar efter att återföra vattenytan till sitt horisontella läge. De i ytan verkande krafterna framgår av fig. 2.5. Dessutom verkar, som framgår av fig. 2.4, inre friktionskrafter och bottenfriktionskrafter.

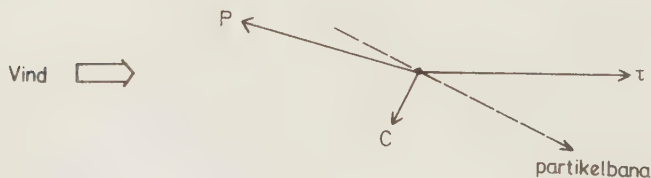


Fig. 2.5 Kraftsituationen i den horisontella vattenytans plan

τ = vindskjuvkraft; C = Corioliskraft (vinkelrät mot partikelbanan); P = gravitationskraft p.g.a. vattenytans lutning.

2.5 Fysikaliska parametrar

För att matematiskt kunna beskriva olika cirkulationsprocesser måste olika fysikaliska storheter bestämmas, vilka kommer att utgöra parametrar i modellbeskrivningen.

Man måste känna vindskjuvkraften, τ . Denna beror av vindstyrkan, luftmassans skiktning och vattenytans hydrodynamiska råhet.

Bottenfriktionskraften, τ_B , kan ses som en yttre kraft, men den beror av bottenströmmen. I vissa av de modeller, som skall presenteras, behöver inte bottenfriktionskrafterna beräknas, utan tillräckligt randvillkor vid botten är, att strömhastigheterna blir noll.

Vid laminär strömning uppstår inre friktion p.g.a. vätskans viskositet. Strömningen i sjöar är emellertid turbulent. Den inre friktionen och spridningen av rörelsemängd orsakas då av turbulenta virvlar, vilket åskådliggöres i figur 2.4. För att få en analogi till molekylär strömning och för att kunna använda Newtons viskositetslag införes begreppet virvelviskositet, eddy viscosity. Virvelviskositeten är inte karakteristisk för vätskan utan beror av flödet.

De turbulenta fluktuationerna medverkar ju också till en transport av värme och materia. För att kunna använda det molekylära betraktelsesättet införes på samma sätt som för rörelsemängd turbulenta utbyteskoefficienter.

Kapitel 3. GRUNDLÄGGANDE TEORI

3.1 Utveckling av de allmänna ekvationerna

- .1 Basekvationer
- .2 Turbulent strömning
- .3 Hydrostatiskt tryck
- .4 Coriolis parametern
- .5 Förenklade ekvationer

3.2 Olika teoretiska beräkningar av den vinddrivna cirkulationen

3.3 Metod för beräkning av strömmar

- .1 Integrerade rörelseekvationer
- .2 Partiella differentialekvationer
- .3 Horisontell friktion enligt Guldberg-Mohn
- .4 Randvillkor
- .5 Dimensionsbetraktelse
- .6 Lösningsprincip för beräkning av strömhastigheter

Litteratur

Sammanfattning

De allmänna rörelseekvationerna förenklas. Olika metoder att beräkna de vindinducerade strömmarna diskuteras. Rörelseekvationerna integreras vertikalt och strömfunktioner införes.

- Figurer 3.1 Ekman spiral
Ekman spiral
3.2 Iterationsschema för modellerna
Flow chart of the models

Tabeller -

Ekvationer 3.1-26

Speciella beteckningar

- c = specifika värmets för vatten
D = djupskala
F = friktionskrafter
G = yttre krafter
H = horisontella turbulensstermer i strömfunktionsekvationen
K = konvektiva termer " "
L = längdskala
Q = värmeutbyte med index i för inre och y för yttre
 W_F = hastighetsskala = vattnets friktionshastighet i ytan
 λ = värmeledningskoefficient för vatten
 μ = vattnets dynamiska viskositet
 ϕ = latitud
 ω = jordens vinkelhastighet

3.1 Utveckling av de allmänna ekvationerna

3.1.1 Basekvationer

Rörelserna i ett sådant kontinuerligt medium som vatten beskrivs av Navier-Stokes' ekvationer. Dessa lyder i ett relativt jordens fixt koordinatsystem

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho \cdot 2 \vec{\omega} \times \vec{v} = -\nabla p + \vec{F} + \vec{G} \quad (3.1)$$

där $\vec{v}$ = vattenpartikelns hastighet, t = tiden, ρ = vattnets densitet, $\vec{\omega}$ = jordens vinkelhastighet, ∇ = gradient operator, p = vätskestrycket, $\vec{F}$ = friktionskrafter, $\vec{G}$ = yttre krafter.

Kontinuitetsekvationen blir, eftersom vattnet kan betraktas som inkompressibelt

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.2)$$

För att fullständigt kunna beskriva en sjös tillstånd tillkommer värmeekvationen, som lyder

$$\rho c \frac{dT}{dt} = Q_1 + Q_y \quad (3.3)$$

där T = temperatur, Q_1 = inre värmeutbyte per volym och tidsenhet, Q_y = yttre värmeutbyte, c = spec. värmeför vatten, samt en tillståndsekvation, som lyder

$$\rho = \text{funktion}(T) \quad (3.4)$$

De yttre krafterna i ekvation (3.1) härrör från tyngdaccelerationer, g. Med mycket god approximation är således $\vec{G} = \rho \vec{g}$ och riktad nedåt.

De inre krafterna beror vid laminär strömning av vattnets viskositet. Med i och j för riktning kan krafterna tecknas enligt

$$F_i = \sum_{j=1}^3 \partial \tau_{ij} / \partial x_j \quad (3.5)$$

$$\tau_{ij} = \mu (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) \quad (3.6)$$

där μ = vattnets dynamiska viskositet, τ_{ij} = skjuvkraft verkande i j -planet i i -riktningen.

Det inre värmeutbytet i ekvation (3.3) tecknas vid molekyulär ledning

$$Q_1 = \lambda \sum_{j=1}^3 \partial^2 T / \partial x_j^2 \quad (3.7)$$

där λ = värmeledningskoefficient.

3.1.2 Turbulent strömning

Vid turbulent rörelse är det inre molekylära utbytet av rörelsemängd och värme litet och kan försummas gentemot det turbulenta utbytet. Hastighetsfluktuationer, primmade termer, antages ske kring ett medelvärde. Eftersom fluktuationernas medelvärde måste vara noll, blir de materiella derivatorna sedan kontinuitetsekvationen utnyttjats

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} = \frac{dv_i}{dt} + \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v_i' v_j'} \quad (3.8)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt} + \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{T' v_j'} \quad (3.9)$$

där strecken över termerna anger tidsmedelvärde. Den sista termen i ekvationen (3.8) representerar en kraft, som i det laminära fallet motsvaras av ekvation (3.5). De turbulenta spänningarna eller Reynolds-spänningarna

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{v_i' v_j'} \quad (3.10)$$

tillkommer då utöver de viskösa spänningarna.

Det är önskvärt att få en analogi till Newtons viskositetslag (ekv. 3.6). Prandtl införde blandningslängdsbegreppet. Detta begrepp möjliggör en hypotetisk definition av virvelviskositet. Med Prandtls blandningslängd, l_p , erhålles

$$\tau_{ij} = \rho l_p^2 \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

För att uttrycket skall kunna skrivas på en form enligt ekvation (3.6) måste virvelviskositeten definieras enligt

$$\nu = l_p^2 \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| \quad (3.12)$$

Det bör observeras, att virvelviskositeten kan vara olika i olika riktningar. Begreppet blandningslängd har visat sig vara användbart vid lösandet av en rad turbulenta strömningsproblem.

Sedan virvelviskositetsbegreppet införts kan ekvationerna (3.1) och (3.3) användas direkt för medelvärdena. F respektive Q_1 får därvid beteckna det turbulenta utbytet av rörelsemängd respektive värme.

3.1.3 Hydrostatiskt tryck

Dimension betraktelse på kontinuitetsekvationen (3.2) visar, att vertikalhastigheten, w , måste förhålla sig till horisontalhastigheten, v , som en djupskala, D , till en längdskala, L . En tidskala kan definieras som L/v . I ekvation (3.1) kan nu accelerationstermen i vertikal riktning jämföras med de yttre krafternas acceleration, g , varvid framgår att om $v = 10$ cm/s, $L = 10^6$ cm och $D = 10^3$ cm, så blir

$$dw/dt - v^2 D/L^2 = 10^{-10} g$$

Eftersom det molekylära rörelsemängdsutbytet är litet, begränsas, om jordrotationstermen tills vidare försummas, rörelseekvationen i vertikal riktning till den hydrostatiska tryckekvationen.

3.1.4 Coriolis parametern

Den accelerationsterm i ekvation (3.1), som beror av jordens rotation, blir med hastighetskomponenterna u, v, w i riktningarna x , väst till öst, y , syd till nord, z , uppåt, och med ϕ som jordlatituden

$$\begin{aligned} \text{i } x\text{-riktn: } & 2\omega (-v \sin \phi + w \cos \phi) \\ \text{i } y\text{-riktn: } & 2\omega u \sin \phi \\ \text{i } z\text{-riktn: } & 2\omega u \cos \phi \end{aligned}$$

Accelerationstermen i z -riktningen ovan kan jämföras med de yttre krafternas accelerationsterm, dvs. med tyngdaccelerationen. Inverkan av de yttre krafterna ses då vara cirka 10^6 gånger större än jordrotationens inverkan. Den hydrostatiska tryckekvationen kan således ersätta rörelseekvationen i vertikal riktning.

Eftersom $w \ll v$, kan sista termen i uttrycket för jordrotationen i x -riktningen försummas. Accelerationstermerna kan förenklas genom införandet av Coriolisparametern

$$f = 2 \omega \sin \phi \quad (3.13)$$

och får då utseendet

$$\text{i } x\text{-riktningen: } -fv ; \quad \text{i } y\text{-riktningen: } fu$$

Det bör observeras, att Coriolis-parametern ändrar värde med ändrad latitud. På våra breddgrader är $f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

3.1.5 Förenklade ekvationer

I komponentform kan rörelseekvationerna tecknas enligt nedan. Hänsyn tages inte till fluktuationer i tryck och densitet.

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (v \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x} (v_{LO} \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (v_{LA} \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (3.14)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{LA} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{LO} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (3.16)$$

Kontinuitetsekvationen blir som tidigare

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

och värmeledningsekvationen får utseendet

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial T}{\partial z} + Q_y / \rho c \quad (3.18)$$

Virvelviskositeten ν tecknas utan index i vertikal riktning, med index LO = longitudinellt i strömmens riktning och med index LA = lateralt vinkelrät mot strömriktningen. Temperaturdiffusiviteterna indiceras med x, y, z i de olika riktningarna. Koordinatsystemet är sådant, att x-riktningen är mot öster, y-riktningen mot norr och z-riktningen uppåt. Strömningen antages ske i x- eller y-riktningen.

3.2 Olika teoretiska beräkningar av den vinddrivna cirkulationen

Samma ekvationer, som gäller inom oceanografin, gäller också för luftens rörelser. I avsnitt 2.1 beskrevs geostrofiska strömmar (vindar). Guldberg och Mohn införde på 1800-talet, se Neuman [1.3], en friktionskraft, som är proportionell mot hastigheten. Därvid kunde man förklara varför luftströmmar rör sig mot lågtryck. Friktionskraften blir i x- och y-riktningarna

$$F_x = -\rho k u ; \quad F_y = -\rho k v \quad (3.19)$$

där k = en friktionskoefficient (s^{-1}). Uttrycket ovan kan enligt Neuman modifieras till att gälla enbart för den horisontella friktionen.

Grunden till den teoretiska lösningen av oceanografiska problem lades av V. Ekman [1.1]. Han införde som tidigare nämnts vertikala friktionskrafter. Genom att i ekvationerna (3.14-15) endast ta hänsyn till jordens rotation och den vertikala turbulensen blir lösningen en s.k. Ekman spiral, fig. 3.1. Strömmarna avtar med ökat djup och vrids åt höger på vår halva av jordklotet.

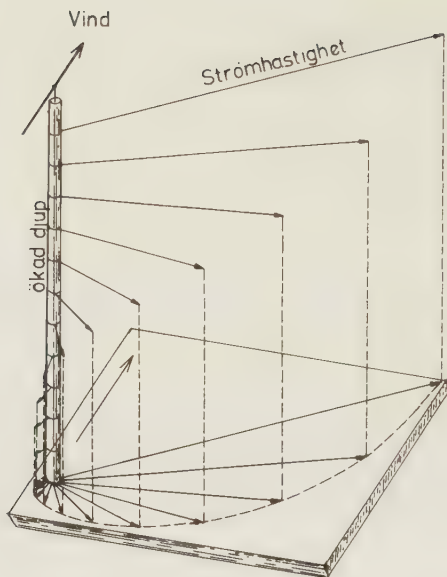


Fig. 3.1 Ekman spiral.

I modern oceanografisk analys integreras rörelseekvationerna (3.14-15) vertikalt. Sverdrup [35] och Stommel [33] bestämde på det viset vattenmassornas cirkulation i en rektangulär ocean. Stommel utgick därvid från horisontella friktionskrafter enligt Guldberg-Mohns antagande. Stimulerade av deras resultat studerade Hidaka [13] och Munk [26,27] den vinddrivna oceaniska cirkulationen. Munk införde de horisontella friktionskrafterna i form av en horisontell virvelviskositet. Teorin om den vinddrivna strömningen har utökats till det icke-stationära fallet av Hidaka [14] och Welander [36]. Welander har också diskuterat inverkan av en variabel undre gräns, dvs. strömsituationen i ett grunt hav.

Kombinationen av vinddrivna strömmar och densitetsströmmar, dvs. i princip strömningen i ett barokliniskt hav, har studerats av Lineykin [24]. I stället för tillståndsekvationen (3.4) och värmeledningsekvationen (3.3) införde han en ekvation för densitetsdiffusion. Robinson och Stommel [30] samt Welander [37] försökte oberoende av varandra förklara den oceanografiska termoklinen och den med denna sammanhängande densitetsströmningen. I princip utgick man från ett stationärt tillstånd med geostrofiska strömmar, hydrostatiskt tryck, kontinuitetsekvationen, en balans i värmeledningsekvationen mellan vertikal diffusion och vertikal samt nord-sydlig advektion och slutligen en linjär tillståndsekvation.

Denna avhandling, som nu presenteras, berör cirkulationen i sjöar. Den storskaliga strömmingen måste likna den i oceaner. Ett förvånande litet antal artiklar behandlar emellertid cirkulationen i bassånger av icke-oceanisk storlek. Fram till 1970 förelåg i stort sett endast Platzmans [1.5] beräkningar av vindinducerade svängningar i Lake Erie. Han integrerade rörelseekvationerna vertikalt och beräknade vattenmassornas svängningar. Överensstämmelsen med verkliga förhållanden var god. Vindinducerade svängningar i de stora sjöarna har på teoretisk väg studerats av Csanady [6,7,8]. Han betraktar vattenmassorna som tvåskiktade. Den skarpa lutningen av termoklinen vid stränderna finner han ge upphov till kustströmmar.

Efter 1970 har i anslutning till de stora forskningsprojekten rörande de stora sjöarna en rad cirkulationsmodeller börjat utarbetas. I nästan alla dessa modeller beräknas emellertid endast masstransporterna och inte strömmarnas vertikala fördelning. Ligget [21,22,23] har dock modifierat Ekmans lösning, så att den gäller för en grund homogen sjö.

Endast en modellbeskrivning, Heaps [12], av sjöar mindre än de stora amerikanska sjöarna är för författaren känd. Lake Windermere i Skottland betraktas som en tvåskiktad sjö med konstant djup och bredd. De av vinden inducerade svängningarna i vattenytan och i språngskiktet beräknades därvid.

3.3 Metod för beräkning av strömmar

3.3.1 Integrerade rörelseekvationer

Ekvationerna (3.14-15) kan integreras vertikalt över ett homogent skikt från $z = -h$ till $z = \eta = 0$, varvid erhålles för volymtransporterna, U och V , per breddenhet

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV + \frac{\partial \overline{hu^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \tau_{ox} - \frac{1}{\rho} \tau_{hx} + v_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \Delta_u \right) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU + \frac{\partial \overline{huv}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{hv^2}}{\partial y} + h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \tau_{oy} - \frac{1}{\rho} \tau_{hy} + v_H \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \Delta_v \right) \quad (3.21)$$

där Newtons viskositetslag har utnyttjats för de vertikalt skjuvande kraftkomponenterna, τ , indicerade med x, y för riktning och o, h för nivå. v_H = horisontell virvelviskositet, vilken förutsättes vara konstant. Överstrukna termer anger medelvärde i vertikalen. Dessa fält-accelerationstermer har omskrivits något med hjälp av kontinuitetsekvationen. Tryckgradienterna är konstanta över hela skiktet. De små till-skotts- Δ -termerna, som uppstår, när integration utföres innanför derivator, ser ut på följande sätt

$$\Delta_u = \Delta_{ux} + \Delta_{uy} ; \quad \Delta_v = \Delta_{vx} + \Delta_{vy}$$

$$\text{med t.ex.} \quad \Delta_{ux} = u_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + u_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - 2 \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}$$

Indiceringen gör resterande Δ -termer självförklarande.

Även kontinuitetsekvationen integreras över ett homogent skikt, begränsat av $z = \eta$ och $z = -h$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.22)$$

3.3.2 Partiella differentialekvationer

Om de tidsberoende termerna i kontinuitetsekvationen får försummas, kan strömfunktioner definieras enligt

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (3.23)$$

med ψ = en integrerad strömfunktion. Strömfunktioner kan definieras enligt ovan vid stationärt tillstånd samt vid icke-stationärt tillstånd, om vattenmassorna är helt densitetshomogena. I det sistnämnda fallet utgör h i ekvation (3.22) nämligen botten, och vattenytans höjning $\partial \eta / \partial t$ blir mycket mindre än de övriga termerna. Med längd-, djup-, tid- och hastighetsskala enligt avsnitt 3.1.3 ses, att accelerationstermen i ekvation (3.22) förhåller sig till hastighetsgradient-termerna som η : djupskalan.

Om nu volymtransportekvationerna divideras med skiktjockleken, h , och ekvation (3.20) därefter deriveras med avseende på y och ekvation (3.21) med avseende på x , så kan trycktermerna elimineras genom att den ena ekvationen subtraheras från den andra. Därvid erhålles sedan strömfunktioner införts

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla^2 \psi - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} + \frac{f}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + K = T + H \quad (3.24)$$

$$T = h \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_0 - \tau_h}{h} \right)_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_0 - \tau_h}{h} \right)_y \right\}$$

Strömmarna i en sjö är horisontellt relativt jämnt fördelade med stora hastighetsgradients endast vid stränderna. K , som betecknar inverkan av icke-linjära termer, får stora värden endast i punkter, vilka grän-sar till stränder.

$$K = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (\overline{hu^2} - \overline{hv^2}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \overline{huv} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\partial \overline{hu^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{huv}}{\partial y} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial \overline{hv^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{huv}}{\partial x} \right)$$

H är inverkan av den horisontella turbulensen. Med strömfunktioner kan H tecknas

$$H = \nu_H \cdot \left\{ \nabla^4 \psi - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \psi + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \psi \right) + \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x} \right) \right) \right\} \quad (3.25)$$

Innanför den stora parentesen skall egentligen också Δ -termerna i ekvation (3.20-21) komma in på formen

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta_v - \frac{\partial}{\partial y} \Delta_u$$

3.3.3 Horisontell friktion enligt Guldberg-Mohn

Om en horisontell friktionskoefficient införes, kan sista termen i ekvation (3.20) utbytas mot $-k \cdot U$ och sista termen i ekvation (3.21) mot $-k \cdot V$. Därvid ändras H i den partiella differentialekvationen (3.24). H blir nu

$$H = -k \cdot \left(\nabla^2 \psi - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) \quad (3.26)$$

I oceaner kan bottenfriktionen i regel försummas. Om bottenfriktionen inte är försumbar, kan för att uppnå en viss grad av förenkling dess effekt tänkas absorberad i "effektiv" inre friktion (se Neuman [1.3] sid. 240).

3.3.4 Randvillkor

Differentialekvationen (3.24) bestämmer volymtransporten i en vattenmassa. För strömningen i en sluten bassäng gäller:

1. Vid botten är vertikalhastigheten $w = 0$. Vid icke-friktionsfri strömning är även $u = v = 0$.
2. I ytan verkar vinden med skjuvkraftskomponenterna τ_x och τ_y .
3. Skjuvkraften i gränsytan $z = -h$ måste kännas. Denna kan sättas till noll eller beräknas ur massflödet eller ur hastighetsgradienten. Randvillkor 3 behövs endast i vissa modeller.
4. Masstransporten vinkelrät mot stranden är noll. Därför blir strömfunktionen längs stränderna konstant, såvida inte ett ut- eller inflöde finns.
5. För att kunna bestämma strömfunktionerna enligt ekv. (3.24-25) krävs fler randvillkor. Låt därför ända intill stranden även masstransporten parallellt med stranden vara noll, vilket ju måste gälla, när djupet går mot noll. För strömfunktionerna gäller då

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \text{ (strand) } = 0 ; \quad n = \text{normalriktning}$$

3.3.5 Dimensionsbetraktelse

För att klargöra betydelsen av de olika termerna i volymtransportekvationerna (3.20-21) göres en enkel dimensionsanalys. Eftersom vinden inducerar strömningen, måste naturligtvis vindkraftstermen vara den term, som har störst inflytande på strömningen. Den vinddrivna masstransporten kompenseras i huvudsak av den returström, som uppstår på grund av vattenytans lutning. Termerna närmast likhetstecknen, tryckgradienttermen och vindkraftstermen, bör alltså vara ungefär lika stora. Vindkraften har dimensionen densitet gånger (hastighet)². Denna friktionshastighet, W_F , som kan vara cirka 1 cm/s, väljes som hastighetsskala. Som längdskala kan väljas $L = 10^5$ cm, som tidskala $L/W_F = 10^5$ s och som djupskala $D = 10^2$ cm. De olika termerna i ekvation (3.20) blir då av storleksordningen nedan, om den horisontella virvelviskositeten är 10^3 cm²/s.

- a. tidsderivata: $W_F^2 D/L = 10^{-3} \quad (\text{cm/s})^2$
 b. advektiva termer: $W_F^2 D/L = 10^{-3} \quad "$
 c. Coriolis term: $W_F Df = 10^{-2} \quad "$
 d. tryckgradient: $g D \eta/L = 1 \quad "$
 e. vindkraft: $W_F^2 = 1 \quad "$
 f. horisontell friktion: $v_H W_F D/L^2 = 10^{-5} \quad "$

Det verkliga inflytandet av de olika termerna studeras längre fram. Det torde emellertid framgå av analysen ovan, att den horisontella friktionen är av underordnad betydelse.

3.3.6 Lösningsskema för beräkning av strömhastigheter

I samtliga modeller av den vindinducerade strömningen bestäms först de yttre förhållandena. Bottenkonfiguration och språngskiktsdjup inläses i modellerna. Vindstyrkan bestämmer skjuvkraften i vattenytan och virvelviskositeten. Därefter bestäms strömfunktioner genom iteration i två dimensioner. Ur strömfunktionerna bestäms tryckgradienter, med vars hjälp sedan strömhastigheter beräknas. Om differentialekvationen (3.24) för strömfunktionerna användes, måste friktionen τ_b bestämmas ett steg tillbaka eller med något approximativt förfarande. Iterationsschemat för modellerna visas nedan.

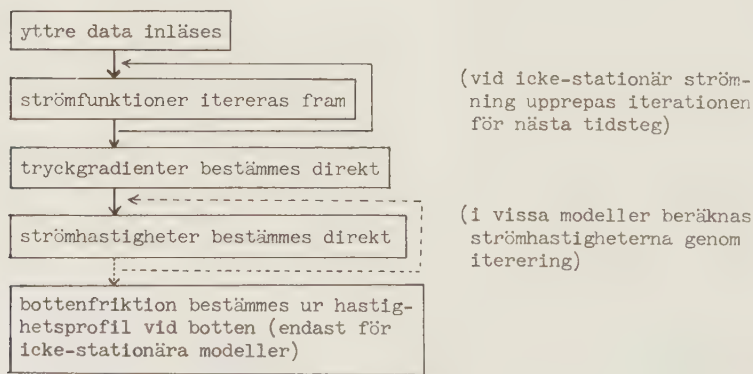


Fig. 3.2 Iterationsskema för modellerna. Streckad pil anger beräkningsgång, som endast utföres i vissa modeller.

Litteratur

1. Abraham, G. [1965]. Horizontal jets in stagnant fluid of other density. - J. Hydraulic Div., ASCE 91 (4), p. 139-154.
2. Bengtsson, L. [1971]. Mathematical models of circulations in lakes. - Nordic IHD field Symp. Vierumäki. Finnish IHD-report 1, p. 75-89.
3. Bengtsson, L. [1973]. Mathematical models of wind induced circulation in a lake. - Proc. Int. Symp. Hydrology of Lakes, Otaniemi, Finland.
4. Carrier, G.F. and Robinson, A.R. [1962]. On the theory of wind-driven ocean currents. - J. Fluid Mech. 12 (1), p. 49-80.
5. Crowley, W.P. [1970]. A numerical model for viscous non-divergent, barotropic wind-driven ocean circulations. - J. Comp. Physics 6 (2), p. 183-199.
6. Csanady, G.T. [1967]. Large-scale motions in the Great Lakes. - J. Geoph. Res. 72 (16), p. 4151-4162.
7. Csanady, G.T. [1968]. Wind-driven summer circulation in the Great Lakes. - J. Geoph. Res. 73 (8), p. 2579-2589.
8. Csanady, G.T. [1968]. Motions in a model Great Lake due to a suddenly imposed wind. - J. Geoph. Res. 73 (20), p. 6435-6447.
9. Emmons, H.W. [1970]. Critique of numerical modeling of fluid-mechanic phenomena. - Annual Review of Fluid Mech. 2, p. 15-35.
10. Gedney, R.T. and Lick, W. [1972]. Wind-driven currents in Lake Erie. - J. Geoph. Res. 77 (15), p. 2714-2723.
11. Harleman, D.R.F. et al. The feasibility of a dynamic model of Lake Michigan. - Proc. 5:th Conf. Great Lakes Res., p. 51-67.
12. Heaps, N.S. and Ramsbottom, A.E. [1966]. Wind effects on the water in a narrow two-layered lake. - Proc. London Math. Soc. 259, p. 390-430.
13. Hidaka, K. [1949]. Mass transport in ocean currents and lateral mixing. - J. Marine Res. 8 (2), p. 132-136.
14. Hidaka, K. [1950]. Drift currents in an enclosed ocean 1.-Tokyo Univ. Geoph. Notes 3 (23), p. 1-23.
15. Hidaka, K. [1950]. Drift currents in an enclosed ocean 2.-Tokyo Univ. Geoph. Notes 3 (38), p. 1-10.
16. Hidaka, K. [1950]. Drift currents in an enclosed ocean 3.-Tokyo Univ. Geoph. Notes 4 (3), p. 1-19.
17. Hidaka, K. [1961]. A contribution to the computation of three-dimensional ocean currents by high speed computers. - Records Oceanog. Works Japan 6 (1), p. 16-28.
18. Hidaka, K. och Iida, H. [1957]. On the influence of the earth's rotation and the dimension of the oceans. - J. Oceanog. Soc. Japan 13 (4), p. 123-126.
19. Ichiye, T. [1949]. On the theory of drift currents in an enclosed sea. - Oceanog. Mag. 1, p. 128-132.

20. Ichiye, T. [1950]. A note on the friction terms in the equation of ocean currents. - *Oceanog. Mag.* 2, p. 49-52.
21. Liggett, J.A. [1969]. Unsteady circulation in shallow homogenous lakes. - *J. Hydraulic Div., ASCE* 95 (4), p. 1273-1288.
22. Liggett, J.A. [1970]. Cell method for computing lake circulation. - *J. Hydraulic Div., ASCE* 96 (3), p. 725-743.
23. Liggett, J.A. and Hadjitheodorou, C. [1969]. Circulation in shallow homogenous lakes. - *J. Hydraulic Div., ASCE* 95 (2), p. 609-620.
24. Lineykin, P.S. [1955]. Wind-driven currents in the baroclinic layer of the sea. - *Tr. Gos. Okeanogr. Inst.* 29 (41).
25. Morgan, G.W. [1956]. On the wind-driven ocean circulation. *Tellus* 8 (3), p. 301-320.
26. Munk, W.H. [1948]. On the wind driven ocean circulation. - *J. Met.* 7 (2), p. 79-93.
27. Munk, W.H. and Carrier, G.F. [1950]. The wind-driven circulation in ocean basins of various shapes. - *Tellus* 2 (3), p. 158-167.
28. Neuman, G. [1960]. On the effect of bottom topography on ocean currents. - *Deutsche Hydrograph. Z.* 13 (3), p. 132-141.
29. Robinson, A.R. [1970]. Boundary layers in oceanic circulation. - *Annual Review of Fluid Mech.* 2, p. 293-312.
30. Robinson, A.R. and Stommel, H. [1959]. The oceanic thermocline and associated thermohaline circulation. - *J. Marine Res.* 21 (1), p. 25-38.
31. Rossby, H.T. [1965]. On thermal convection driven by non-uniform heating from below: an experimental study. - *Deep-Sea Res.* 12, p. 9-16.
32. Sarkisyan, A.S. [1969]. Theory and computation of ocean currents. - Israel program for Sc. Translations, UDC 551.465.55.
33. Stommel, H. [1948]. The westward intensification of wind-driven ocean currents. - *Trans. Amer. Geoph. Union* 29 (2), p. 202-206.
34. Stommel, H. and Veronis, G. [1957]. Steady convective motion in a horizontal layer of fluid heated uniformly from above and cooled non-uniformly from below. - *Tellus* 9, p. 401-407.
35. Sverdrup, H.U. [1947]. Wind-driven currents in a baroclinic ocean. - *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 33 (11), p. 318-326.
36. Welander, P. [1957]. Wind action on a shallow sea. Some generalizations of Ekman's theory. *Tellus* 9 (1), p. 45-52.
37. Welander, P. [1959]. An advective model of the ocean thermocline. - *Tellus* 11, p. 309-318.

Kapitel 4. VINDSKJUVKRAFT

4.1 Teoretiska vindprofiler

- .1 Rörelsemängdstransport vid vattenytan
- .2 Neutral luftskiktning
- .3 Likformighetsteori
- .4 Generella hastighetsprofiler

4.2 Analys av mätresultat från litteraturen

- .1 Oceanmätningar
- .2 Mätningar från stora sjöar
- .3 Mätningar från mindre vattenområden

4.3 Vindens och vindkraftens fördelning över en sjöyta

- .1 Mättnings- och utvärderingsförfarande
- .2 Släpkraftskoefficient för is
- .3 Mätresultat
- .4 Resultat

4.4 Vindskjuvkraft på Vombsjön

- .1 Mättnings- och utvärderingsförfarande
- .2 Mätresultat i sjömitt
- .3 Mätresultat vid stranden
- .4 Slutresultat

Litteratur

Sammanfattning

Teorin för atmosfärisk turbulens genomgås. Analys av mätresultat från litteraturen visar, att släpkraftskoefficienten för insjöar är cirka $1,0 \cdot 10^{-3}$. Mätningar över Vombsjön ger en släpkraftskoefficient av $1,2 \cdot 10^{-3}$ oberoende av vind och av luftskiktning. Vinden och vindkraften befinnes vara jämnt fördelad över en sjöyta.

Figurer 4.1 Mätstråk över Velen samt referensstationer.
Measuring sections over Lake Velen and reference stations

Tabeller 4.1 Vindprofiler över Lake Erie enligt Bruce
Wind profiles over Lake Erie according to Bruce

- .2 Resultat från stråk 1
Results from section 1
- .3 Resultat från stråk 2
Results from section 2
- .4 Resultat från stråk 3
Results from section 3
- .5 Resultat från stråk 4
Results from section 4
- .6 Friktionshastighet vid glatt yta
Friction velocity with smooth surface
- .7 Resultat från stråk 5
Results from section 5
- .8 Friktionshastighet vid glatt yta
Friction velocity with smooth surface
- .9 Mätresultat från sjömitt
Results from the central part of Lake Vomb
- .10 Medelvärden ur samtliga vindprofiler
Means from the wind profiles
- .11 Mätresultat 500 m från land
Results 500 m offshore
- .12 Medelvärden för vindprofilerna enligt tabell 4.11
Means from the wind profiles in table 4.11

Ekvationer 4.1-20

Speciella beteckningar

a = blandningslängdsexponent
c = våghastighet
c_p = specifika värmeför luft vid konstant tryck
f = universell funktion
H = uppåtriktat värmeflöde
k = von Kármáns konstant $\approx 0,4$
k_Z = luftens vertikala utbyteskoefficient för värme
k_m = " " " för rörelsemängd
L = Monin-Obukhovs längdskala
M = korrektionshastighet vid icke-neutral skiktning
Rc = kritiskt Richardsons fluxtal
Rf = " " "
Ri = " tal
T_x = luftens potentiella temperatur $\approx$ abs. temp.
T = temperaturskala
T_O = luftens absoluta temperatur vid vattenytan
W_F = vindens friktionshastighet, med χ som index = relativvärde
z_O = vattenytans råhet
 γ = förhållandet mellan utbyteskoefficienterna för värme och rörelsemängd
 ϕ = universell funktion
 ρ_p = luftens potentiella densitet
 v_{air} = luftens kinematiska viskositet

4.1 Teoretiska vindprofiler

4.1.1 Rörelsemängdstransport vid vattenytan

Kunskap om den tangentiella kraft, som vinden utövar på vattenytan, är ytterst väsentlig för varje försök att analysera vattenrörelser betingade av vinden. Denna skjuvkraft bör kunna beräknas utifrån meteorologiska data, helst enbart som en funktion av vindhastigheten. I de flesta undersökningar redovisas också skjuvkraften enligt

$$\tau = \rho_{\text{air}} C_D (W - c)^2 \quad (4.1)$$

där τ = vindskjuvkraft på vattenytan, ρ_{air} = luftens densitet, C_D = släpkräftskoefficient, W = vindhastighet, c = vattenrytekrusningarnas hastighet (ripples).

Släpkräftskoefficienten beror naturligtvis på till vilken höjd vindhastigheten relateras. Koefficienten beror även på andra faktorer så att

C_D = funktion (vind, luftskiktning, våghöjd, sjöstorlek)

I ett turbulent flöde över en fast yta överföres rörelsemängd mot ytan av Reynolds-spänningarna. Om vindhastigheten över en vattenyta är liten, finns knappast några krusningar på vattenytan. Luftflödet motsvarar det över en aerodynamiskt slät yta. Viskösa spänningar övertar rörelsemängds-transporten närmast ytan. Om däremot många små vågor finns på vattenytan, kan luftströmmen betraktas som aerodynamiskt rå. Rörelsemängd överföres till dessa små vågor, vilka snabbt dör ut och förlorar sin rörelsemängd till vattenströmmarna. Troligen är luftströmmen aldrig helt rå, utan den direkta viskösa kraften inverkar alltid.

Vindvågor kan tillväxa genom tillskott av rörelseenergi från vinden. Om vindens hastighet och varaktighet är kända, går det att beräkna en vågsläpkräftskoefficient ur förhållandet mellan vågenergi och våghastighet. Stewart [21] har på detta vis beräknat en vågsläpkräftskoefficient

$$C_{våg} = 0,2 \cdot 10^{-3}$$

Phillips [1.4] har för oceaner teoretiskt beräknat rörelsemängdsutbytet mellan vind och vågor till högst 10% av vindens totala rörelsemängdsutbyte med vattenytan. I de flesta sjöar är våghöjden emellertid så liten, att rörelsemängdstransporten till vågor blir helt försumbar gentemot transporten till strömmar.

De processer, som äger rum ovanför vattenytan, måste analyseras med metoder från den teoretiska turbulenteorin. Vindskjuvkraften är en kombination av Reynolds-spänningar och viskösa spänningar. Om de sistnämnda är små, så gäller enligt ekvation (3.10)

$$\tau / \rho_{\text{air}} = W_F^2 = - \overline{v'_x v'_z} = - \text{korrr.koeff.} \cdot \overline{v'_x} \cdot \overline{v'_z} = 0,5 \cdot 2W_F \cdot 1W_F \quad (4.2)$$

där W_F = vindens friktionshastighet, v' = vindfluktuationshastigheter i vindriktningen, x , och vertikalt, z , och där insatta värden är uppskattade genom mätningar med hot-film anemometer, se Monin [12].

I det atmosfäriska gränsskiktet, som har en höjd av cirka 50 m, inverkar inte jordens rotation på luftrörelserna, och Reynolds-spänning-

arna är oberoende av höjden. De faktorer, som bestämmer skjuvkraften, är

- a. z_0 = vattenytans karakteristiska råhet
- b. ν_{air} = luftens kinematiska viskositet
- c. W = vindhastigheten
- d. $g \rho_p^{-1} \partial \rho_p / \partial z$ = deplacementkrafter p.g.a. luftens skiktning.
 ρ_p = luftens potentiella densitet.

4.1.2 Neutral luftskiktning

Om den potentiella densiteten inte ändras med höjden, så verkar inte några deplacementkrafter. Luften sägs då vara neutralt skiktad. Endast de dynamiska faktorerna a, b och c bestämmer luftens strömning. I det dynamiska gränsskiktet närmast vattenytan inverkar aldrig luftens skiktning på turbulensen, utan denna bestäms enbart av dynamiska faktorer. Således gäller vid strömning över en rå yta, om Prandtl's turbulenta blandningslängd är proportionell mot höjden över vattenytan, z räknad positiv uppåt:

$$l_p = k \cdot z \quad (4.3)$$

$$W_F = C_D^{\frac{1}{2}} \cdot W \quad (4.4)$$

$$C_D = (k \ln^{-1} (z/z_0))^2 \quad (4.5)$$

med $W = 0$ för $z = z_0$ och $k =$ von Kármán's konstant $\approx 0,4$. En rad mätningar bekräftar, att vindprofilen är logaritmisk vid neutral luftskiktning. Direkta mätningar av vindskjuvkraften bekräftar vidare, att $k \approx 0,4$, se t.ex. Deacon [6], Monin [12].

Om vattenytan är dynamiskt slät, bildas närmast denna ett visköst gränsskikt, i vilket de viskösa spänningarna dominerar över Reynolds-spänningarna. Detta skikt är endast cirka 1 mm tjockt. Hastighetsfördelningen utanför skiktet bör följa von Kármán's lag för strömning över en slät yta.

$$W/W_F = 5,5 + k^{-1} \ln (z W_F / \nu_{\text{air}}) \quad (4.6)$$

Rossby [18] finner, att ekvation (4.6) beskriver vindprofilen över vattenytan för vindar upp till 7 m/s. Ekvation (4.6) kommer att kallas von Kármán profil och ekvation (4.4-5) logaritmisk profil.

4.1.3 Likformighetsteori

I det dynamiska gränsskiktet är värme och fuktighet passiva egenskaper. De utövar inget dynamiskt inflytande på turbulensen. Värmeflödet bestämmes emellertid det dynamiska gränsskiktets tjocklek, L, Monin-Obukhovs längdskala. Utanför gränsskiktet får värme- och fuktighetsflödena betydelse. Även en temperaturskala, T^x , kan definieras.

$$L = - c_p \rho_{\text{air}} W_F^3 T_0 / (\text{kg H}) \quad (4.7)$$

$$T^x = - H / (k c_p \rho_{\text{air}} W_F) \quad (4.8)$$

där c_p = spec. värmets för luft vid konstant tryck, T_0 = luftens absoluta temperatur vid vattenytan, H = uppåtriktat värme flöde.

Med Monins [11,12] hypotes om likformighet mellan värme och rörelsemängdsöverföring ger en dimensionsbetraktelse

$$\frac{kz}{W_F} \frac{\partial W}{\partial z} = \phi\left(\frac{z}{L}\right) = \gamma \frac{z}{T^x} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.9)$$

där ϕ = en universell funktion, T = potentiella temperaturen, vilken ej är urskiljbar från den absoluta temperaturen, $\gamma = k_z/k_m$ = förhållandet mellan de vertikala utbyteskoefficienterna för värme och rörelsemängd. Ekvation (4.9) kan integreras med $W = 0$ och $T = T_0$ för $z = z_0$. Med f = en universell funktion erhålles

$$\frac{kW}{W_F} = \left\{ f\left(\frac{z}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right) \right\} = \gamma \frac{T - T_0}{T^x} \quad (4.10)$$

Vid neutral skiktning är den potentiella densiteten konstant med höjden, och något värme flöde äger inte rum. Således går $L \rightarrow \infty$, och ekvation (4.10) måste vid dynamiskt rå vattenyta övergå i logaritmlagen, ekvationer (4.4-5). För små värden på z/L är således $f = \ln$ och $\phi =$ konstant. Om funktionen f serieutvecklas kring $z/L = 0$, erhålles

$$f(z/L) = \ln z/L + \text{konst} \cdot z/L + \text{konst}$$

Eftersom värme flödet liksom friktionshastigheten enligt ekvation (3.6) kan tecknas med utbyteskoefficienter, så kan vindhastighetsprofilen beskrivas med den s.k. "log + lin"-lagen nedan.

$$\begin{aligned} H &= - \rho_{\text{air}} c_p k_z \frac{\partial T}{\partial z} \\ W_F^2 &= k_m \frac{\partial W}{\partial z} \\ W &= \frac{W_F}{k} \ln \frac{z}{z_0} + \text{konst} \cdot \gamma \frac{(z - z_0)}{T_0} \frac{\partial T / \partial z}{\partial W / \partial z} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Monin ger konstantvärdet 10 för stabil skiktning och 1,4 för instabil skiktning. γ anges vid fri konvektion vara 0,87. Deacon [7] redovisar olika mätningar, vilka tyder på, att konstanten är cirka 3,5 och γ ungefär 1. Australiensiska mätningar av Charnock, se [12], ger för stark instabilitet γ -värden upp mot 3,5.

Vid mycket instabil luftskiktning är värme flödet stort, och $L \rightarrow 0$. Om vinden är mycket svag, så att friktionshastigheten $\rightarrow 0$, föreligger fri konvektion. Temperaturgradienten kan då inte bero av friktionshastigheten, varför det måste gälla

$$f(z/L) = \text{konst} (z/L)^{-1/3} \quad (4.12)$$

med konstantvärdet cirka 1,25 enligt Monin. γ existerar, ty att friktionshastigheten $\rightarrow 0$ innebär endast, att rörelsemängden blir en passiv egenskap.

Vid mycket stabil luftskiktning undertrycks turbulensen. Om massflykten, dvs. i praktiken det nedströmmande värmets, blir för stor, kan turbulensen inte upprätthållas. Förhållandet, $R_f = \text{Richardsons fluktal}$, mellan displacementkrafternas och Reynolds-spänningarnas arbete måste vara mindre än ett visst kritiskt tal, R_c . Med $R_f = R_c$ kan funktionerna ϕ och f i ekvationerna (4.9-10) bestämmas

$$R_f = - \frac{gH}{T_0 c_p} / \left(\tau \frac{\partial w}{\partial z} \right) < R_c \quad (4.13)$$

$$\phi(z/L) = f(z/L) = R_c^{-1} \cdot z/L \quad (4.14)$$

Hastighetsprofilen ökar således linjärt med höjden vid mycket stark instabilitet. I sådana fall anger Monin $\gamma = R_c = 0,1$.

Det bör observeras, att likformighetsteorin förutsätter, att vindprofilen är logaritmisk vid neutral luftskiktning.

4.1.4 Generella hastighetsprofiler

Vid neutral luftskiktning blir den teoretiska vindprofilen logaritmisk, om den turbulenta blandningslängden ökar proportionellt mot höjden över vattenytan. Vid instabil skiktning ökar de turbulenta virvlarnas storlek snabbare, medan blandningslängden vid stabil skiktning inte ökar så snabbt som vid neutral skiktning. Det är därför naturligt att antaga

$$l_p \sim z^a \quad (4.15)$$

med $a = 4/3$ vid fri konvektion, $a > 1$ vid instabil skiktning, $a = 1$ vid neutral skiktning, $a < 1$ vid stabil skiktning, $a = 0$ vid stark skiktning. Närmast ytan spelar skiktningen ingen roll, utan vid en rå yta skall den logaritmiska profilen gälla. Hastighetsprofilen blir då, s.k. Deaconprofil [6]

$$W = W_F k^{-1} \left\{ (z/z_0)^{1-a} - 1 \right\} / (1-a) \quad (4.16)$$

Om $a \rightarrow 1$ återfås den logaritmiska profilen. Serieutveckling av ekvation (4.16) ger uttryck analoga med utvecklingen av f -funktionen. Deacon finner, att ekvation (4.16) representerar vindprofilen upp till en höjd av 8 m. Mätningar av Sverdrup över snö och Deacon över gräs ger

$$a = 1,1 \text{ för } Ri = -0,1 \text{ och } a = 0,9 \text{ för } Ri = 0,05.$$

$Ri = \text{Richardsons tal}$ är ett mått på stabiliteten hos luftmassorna och har ett enkelt samband med Richardsons fluktal

$$Ri = g \frac{\partial T}{\partial z} / T_0 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (4.17)$$

$$R_f/R_i = \gamma \quad (4.18)$$

Med Richardsons tal relaterad till nivån z har en allmängiltig teoretisk vindprofil givits av Holzman, se [6]. Funktionsuttrycket i ekvation (4.9) skall vara

$$\phi(z/L) = (1 - \text{konst} \cdot Ri)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

där konstantvärdet enligt Deacon är cirka 10. Ett begränsat värde på den positiva stabiliteten måste således vara $Ri = 1/\text{konst} \approx 0,1$. Ekvation (4.19) är i princip den med likformighetsanalys erhållna ekvation (4.9).

4.2 Analys av mätresultat från litteraturen

4.2.1 Oceanmätningar

Vid fältmätningar av vindprofiler redovisas endera släpkräftskoefficienten, för att användas i ekvation (4.1), eller den karakteristiska råheten. I det först nämnda fallet måste anges till vilken nivå släpkräftskoefficienten relateras. I stället för C_D indiceras därför med en nivå angiven i meter, i regel C_{10} .

Det först beräknade vindskjuvkraftvärdet på en vattenyta gavs av Ekman [1.4]. Omräknat till 10-meters nivå blir hans släpkräftskoefficient

$$C_{10} = 2,8 \cdot 10^{-3} \quad [\text{Östersjön för } W \approx 20 \text{ m/s}]$$

vilket indikerar en råhet av 0,6 cm, om hastighetsprofilen förutsättes vara logaritmisk. Ekman utförde sina beräkningar utifrån observationer av vattenståndsförändringar.

I sitt pionjärarbete [18] pekar Rossby på en rad observationer, vilka lyder på, att havsvattenytans råhet är i närheten av 0,6 cm för vindstyrkor kring 10 m/s. Rossby menar vidare, att ett laminärt gränsskikt existerar för vindhastigheter upp till 7 m/s. Om vindprofilen ekvation (4.6) skall uttryckas enligt ekvation (4.1) blir släpkräftskoefficienten

$$C_{10} = 0,9 \cdot 10^{-3} \quad [\text{slät yta för } W = 2-7 \text{ m/s}]$$

Munk [14] menade, att under en viss kritisk vindhastighet, $W = 6-7 \text{ m/s}$, existerar ett laminärt gränsskikt, och släpkräftskoefficienten skulle då vara ungefär 0,0009. Vid vindhastigheter större än den kritiska existerar inte något laminärt skikt. Släpkräftskoefficienten är då omkring 0,0025. Släpkräftskoefficienten skulle således uppvisa en diskontinuitet. Den kritiska vindhastigheten är lägre under vintern, eftersom vattnet då värmer luften, och turbulensen blir kraftigare. Observationer visar, att släpkräftskoefficienten är högre vid starka vindar än vid små. Existensen av en kritisk vindhastighet är dock inte accepterad. Övergången från slät till rå strömning måste ske kontinuerligt.

Wilson [24] har sammanfattat alla de för honom tillgängliga vindobservationerna över oceaner. Han anger då följande medelvärden, för vilka han skiljer på svaga och starka vindar.

$$\begin{aligned} C_{10} &= 1,5 \cdot 10^{-3} && [\text{oceaner för } W < 6 \text{ m/s}] \\ C_{10} &= 2,4 \cdot 10^{-3} && [\text{oceaner för } W > 10 \text{ m/s}] \end{aligned}$$

4.2.2 Mätningar från stora sjöar

En sjös vattenyta bör vara mindre rå än havsytan. Släpkräftskoefficienten för sjöar skall då vara lägre än Wilsons värden. Portman [17] har utfört intensiva mätningar av vind och temperaturprofiler över Lake Michigan. För låga vindhastigheter stämmer Monin-Obukhovs likformighetshypotes, om luftskiktningen är instabil men inte om den är stabil, inversion. I [19] redovisar Ryznar/Portman

$$\begin{aligned} C_{10} &= 0,3 \cdot 10^{-3} & [\text{Michigan för } W = 1,5 \text{ m/s}] \\ C_{10} &= 1,0 \cdot 10^{-3} & [\quad \quad \quad \text{för } W = 9 \text{ m/s} \quad] \end{aligned}$$

Från Bruce m.fl. [4] meddelas från de stora sjöarna i Nordamerika

$$C_{10} = 0,3 - 0,6 \cdot 10^{-3} \quad [\text{Lake Erie för } 2 < W < 6 \text{ m/s}]$$

Koefficienten är beräknad utifrån logaritmlagen (ekv. 4.5). Värdena förefaller orimligt låga och analyseras därför närmare. Mätningarna omfattar två serier om 10 timmar. Mätning 1 har utförts under kvälls- och natttimmar och mätning 2 under eftermiddags- och kvällstimmar. I varje fall under mätserie 2 kan en först nedåtriktad och sedan uppåtriktad värmetransport ha kompenserat varandra, så att skiktningen i själva verket inte så nära överensstämmer med den neutrala, som tabellen nedan visar.

Tabell 4.1 Vindprofiler över Lake Erie enligt Bruce

nivå	vind (m/s)					temp (°C)		W_F (cm/s)	C_{10} $\times 10^4$
	0,5 m	1 m	2 m	4 m	10 m	0,5 m	4 m		
serie 1	2,90	3,04	3,22	3,35	3,54	19,1	18,1	8,5	5,2
serie 2	4,92	5,14	5,27	5,40	5,58	19,6	19,1	8,8	2,5

Den första av de båda vindprofilerna överensstämmer inte särskilt bra med en logaritmisk profil. Däremot beskriver von Kármáns ekvation (4.6) vindprofilen ända upp till 10 m:s nivå. Friktionshastigheten kan beräknas för varje nivå med ekvation (4.6). Därvid erhålles 11,0 cm/s (0,5 m), 11,0 cm/s (1 m), 10,9 cm/s (2 m), 10,8 cm/s (4 m) och 10,7 cm/s (10 m). Släpkräftskoefficienten blir då

$$C_{10} = 0,95 \cdot 10^{-3} \quad [\text{Lake Erie för } W = 3,5 \text{ m/s}]$$

Även vindprofil 2 avviker nedtill från den logaritmiska profilen men följer för den skull inte en von Kármán-profil.

Jones och Bellaire [9] sammanfattar mätningar från Östersjön av Palmén och Laurila, $C_{15} = 2,4 \cdot 10^{-3}$ vid storm, och från Chesapeake Bay av Pollak, $C_{15} = 2,1 \cdot 10^{-3}$. Jones och Bellaire föreslår en modifiering av ekvation (4.1), som på ett enkelt sätt tar hänsyn till icke-neutral luftskiktning. Till vindhastigheten skall adderas M = temp.skillnaden mellan vatten och luft. Om vattnet är varmare än luften, $M > 0$, är

turbulensen starkare, och rörelsemängd transporteras lättare nedåt än vid neutral skiktning. Det är dock orimligt, att M skulle vara ett så enkelt uttryck som en temperaturdifferens. M bör i stället vara en funktion med dimensionen hastighet enligt

$$M = W_F \cdot f(1 - \text{vattnets temp.} / \text{vattenytans jämviktstemp.})$$

4.2.3 Mätningar från mindre vattenområden

Undersökningar för mindre sjöar har utförts av Hellström [8]. I Ringköbings fjord, som är nära 3 mil lång, har Hellström använt sig av den s.k. slope-method

$$\partial n / \partial x = \tau / (\rho gh) \quad (4.20)$$

med n = vattenytans nivå och h = vattendjupet. Från 11 stormtillfällen med vindar mellan 9-30 m/s erhåller han

$$\tau = 0,04 \cdot W^{1,8}$$

om skjuvkraften mäts i dyn/cm² och vindhastigheten i m/s. Om exponenten förutsättes vara 2, blir släpkraftskoefficienten vindberoende. Den minskar med ökad vindstyrka och har för 20 m/s värdet nedan, vilket dock inte kan refereras till en viss nivå.

$$C_D = 1,75 \cdot 10^{-3} \quad [\text{Ringköbings fjord för } W = 20 \text{ m/s}]$$

Ekvation (4.20) tar inte hänsyn till bottenfriktionen, vilken dock, eftersom fjorden är mycket grund med ett medeldjup av 1,7 m och ett maximidjup av 5 m, måste spela stor roll. Eftersom fjorden är sluten, kan man antaga, att en kompensationsström uppstår, och att vindkraft och botten-skjuvkraft samverkar, så att $\tau + \tau_B = 1,5 \tau$, vilket skulle ge släpkraftskoefficienten $1,2 \cdot 10^{-3}$.

Mätningar för små sjöar har utförts av Sheppard, se [6]. Han redovisar

$$C_{10} = 0,56 \cdot 10^{-4} \quad [\text{små sjöar för } W < 5 \text{ m/s}]$$

$$C_{10} = 10^{-4} \{-1,2 + 1,37 W\} \quad [\text{små sjöar för } W > 5 \text{ m/s}]$$

med vindhastigheten i m/s.

För relativt slutna vattenytor som sjöar och fjordar sammanfattar Deacon [7] en rad mätningar och finner för ungefär neutral luftskiktning

$$C_{10} = 1,2 \cdot 10^{-3} \quad [\text{små sjöar för } 3 < W < 9 \text{ m/s}]$$

Sammanfattningsvis: släpkraftskoefficienten för insjöar är cirka $1,0 \cdot 10^{-3}$.

4.3 Vindens och vindkraftens fördelning över en sjöyta

4.3.1 Mätnings- och utvärderingsförfarande

För att bestämma vindens och vindskjuvkraftens fördelning över en sjö uppmättes under mars månad 1971, då sjön var isbelagd, vindprofiler över sjön Velen, som har en yta av cirka $1 \times 7 \text{ km}^2$. Ur vindprofilerna för olika positioner ute på sjön utvärderades skjuvkraften. Hänsyn till icke-stationära förhållanden togs genom att jämföra med en referensmätare mitt ute på sjön. Mätningarna utfördes under vinterförhållanden, för att man lättare skulle kunna röra sig över sjön.

Tre stycken vindmätarstationer användes, av vilka två tjänstgjorde som referensstationer. Referensstation 1 bestod av en vindmätare på 2,43 cm höjd utrustad med en mekanisk givare för såväl riktning som hastighet.

Vid referensstation 2 uppmättes såväl vindstyrka som vindriktning på nivåerna 2 m resp. 3 m. Vindstyrkan uppmättes även på 1,5 m höjd. Dessa instrument var kopplade till en datalogg-anordning. Samtliga vindmätare mätte meter vindväg.

Den rörliga vindstationen bestod av 3 stycken vindmätare placerade på 0,6 m, 2 m resp. 6 m:s höjd. För varje position uppmättes meter vindväg under 30 eller 60 minuter, varvid avläsningar gjordes var 10 minut.

Ny position intogs genom förflyttning i sjöns längdriktning eller tvärs denna. Under fyra dagar utfördes mätningar längs fem stråk, vilka är angivna på figur 4.1. Stråkens start och ändpositioner inmättes genom avskärning med teodolit. För övriga positioner mättes avstånden mellan de olika mätplatserna med måttband. Då vindstationen skulle flyttas, placerades hela anordningen (stång med tre vindmätare) på en liten släde. En förflyttning kunde därvid ske inom loppet av fem minuter.

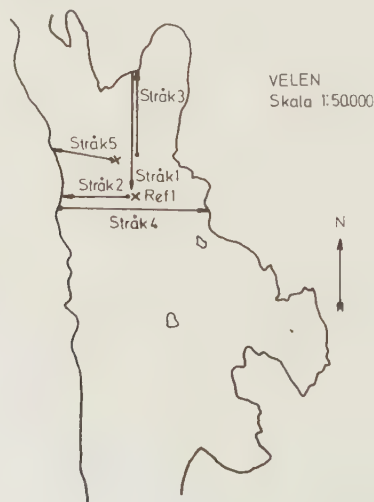


Fig. 4.1 Mätstråk över Velen samt referensstationer.

Redan efter en dags mätningar upptäcktes, att samma vindstyrka uppmättes för 10 minuters mätningar som för 60 minuters mätningar, om hänsyn togs till eventuell trend. Det befanns därför vara tillfyllest att utsträcka mätningarna över 30 minuter för varje mätplats. Variansen, efter korrektion för trend, höll sig för varje position kring $0,1 \text{ m}^2/\text{s}^2$.

För varje mätplats och varje nivå beräknades medelvinden under mättiden (30 eller 60 min). Detta värde plottades på ett semi-logaritmiskt diagram. För nästan varje mätplats överensstämde den logaritmiska vindprofilen med den verkliga. I dessa fall kunde friktionshastigheten beräknas enligt ekvation (4.5).

Hänsyn togs till icke-stationära förhållanden genom att beräkna en relativ friktionshastighet

$$W_F^x = W_F \cdot W_O / W_C$$

och en relativ vindhastighet för 2 meters nivå

$$W_2^x = W_2 \cdot W_O / W_C$$

där x anger relativvärde och där

W_C = vindhastighet vid en referensstation då W_2 mätes

W_O = vindhastighet vid referensstationen vid en bestämd tidpunkt.

4.4. Släpkräftskoefficient för is

Som biresultat kunde släpkräftskoefficienten över is erhållas. Denna beräknas ur ekvation (4.4), där vindhastigheten väljes för den nivå, till vilken man önskar relatera släpkräftskoefficienten.

I litteraturen finns endast rapporterat ett fåtal mätningar av släpkräftskoefficienter för is. För packis i Arktiska oceanen har Untersteiner och Badgley [23] funnit $C_{10} = 1,4 \cdot 10^{-3}$ och för drivande is i St. Lawrence-bukten rapporterar Seifert och Langleben [20] $C_{10} = 1,7 \cdot 10^{-3}$. I [23] nämns också en undersökning av Suzuki, som för slät snötäckt is erhöi $C_{10} = 1,1 \cdot 10^{-3}$.

Den arktiska isen är gammal is, och den är täckt av kornig snö. Aerodynamiskt sett måste den arktiska isen vara mera rå än sjöis, vilken ju bara kan vara någon månad gammal. Deacon [6] har själv uppmätt en råhet av 0,005 cm för jämn snö och en råhet av 0,09 cm för en naturlig snöyta. Deacon redovisar också Sverdrups värde för snö, 0,25 cm. Råhetsvärdena ovan motsvarar koefficienterna $1,05 \cdot 10^{-3}$, $1,85 \cdot 10^{-3}$ samt $2,3 \cdot 10^{-3}$. Monin [12] anger råheten för en jämn snöyta till 0,001 cm. I samtliga fall är råheten så liten, att strömning över glatt yta torde föreligga. Detta påpekas också av Deacon.

4.3.3 Mätresultat

Nedan redovisade vindhastigheter är avlästa med en noggrannhet av ungefär 0,03 m/s. Friktionshastigheten får därvid en noggrannhet av något bättre än 2,0 cm/s. Referensmätarna ger emellertid en vida sämre noggrannhet, cirka 0,6 m/s. Den relativa friktionshastigheten kan därvid få ett fel på ytterligare 2 cm/s och den relativa vinden ett fel på 0,6 m/s. Vinden har vid beräkningarna förutsatts vara uniform och stationär i tiden.

Stråk 1 23/3 -71

Väderförhållanden: solsken -1°C

Vind: i sjöns längdriktning (N) 4 m/s

Stråk: i sjöns längdriktning (S), från stranden

C₁₀: $10 \cdot 10^{-4}$, går att "åka kana" på isen

För samtliga mätplatser var vindprofilerna i stort sett logaritmiska. Medelvindhastigheterna (m/s) över 60 minuter redovisas i tabell nedan.

Tabell 4.2 Resultat från stråk 1

avstånd från land	25 m	75 m	150 m	230 m	375 m	500 m
nivå						
1 m	2,96	3,29	3,27	4,84	5,03	5,19
2 m	3,15	3,56	3,52	5,09	5,40	5,50
6,2 m	3,53	4,02	4,04	5,50	6,00	6,04
W_F (cm/s)	11,9	15,5	16,2	14,0	20,6	18,0
W_O/W_C	1,12	1,0	1,0	0,72	0,67	0,70
W_F^x (cm/s)	13,3	15,5	16,2	10,1	13,8	12,6
W_2^x (m/s)	3,53	3,56	3,52	3,66	3,62	3,85

vindriktning → → → → → →

De uppmätta vindstyrkorna ökade längs stråket, men eftersom även referensvinden ökade befanns relativvinden vara konstant. Friktionshastigheten ökade liksom vinden snabbt med avståndet från land och nådde sitt fulla värde redan 25 m från stranden.

Stråk 2 24/3 -71

Väderförhållanden: snål vind $-2^{\circ} - 1^{\circ}\text{C}$
 Vind: 1 sjöns längdriktning (SSV) 5 m/s
 Stråk: tvärs sjön (V), mot land
 C_{10} : $11 \cdot 10^{-4}$, går inte att "åka kana"

Medelvindhastigheter (m/s) över 30-minuters intervall redovisas nedan.
 Friktionshastigheterna är beräknade med logaritmlagen.

Tabell 4.3 Resultat från stråk 2

avstånd från land	350 m	250 m	150 m	50 m	25 m	5 m
nivå						
0,61 m	5,35	4,63	4,59	4,82	4,37	3,20
2 m	6,20	5,20	5,23	5,30	4,84	3,80
6,20 m	6,76	5,68	5,82	5,84	5,32	4,52
W_F (cm/s)	(23,1) ⁺	18,2	20,6	16,7	15,9	(22,0) ⁺⁺
W_O/W_C	0,86	1,05	1,0	1,0	1,12	1,10
W_F^x (cm/s)	(19,9) ⁺	19,1	20,6	16,7	17,6	- ++
W_2^x (m/s)	5,33	5,47	5,23	5,30	5,41	4,18
vindriktning	↑	↑	↑	↑	↑	↑

- +) Den första positionen uppvisar inte helt logaritmisk vindprofil. Det snöade lätt vid just detta måttillfälle. Logaritmprofil för endast 6 och 2 m:s värdena ger friktionshastigheten 20,3 m/s. Relativvärdet blir 17,5 cm/s.
- ++) Den sista mätplatsen ligger endast 7 m från en trädbevuxen höjd, totalhöjd c:a 25 m. Man kan således inte förvänta sig, att vindprofilen här skall vara logaritmisk. Trots det ansluter sig profilen relativt nära till en logaritmisk profil med $W_F = 22,0$. Värdet utnyttjas dock inte vidare.

Såväl vind- som friktionshastighet synes, bortsett från den innersta punkten, vara konstanta.

Stråk 3 24/3 -71

Väderförhållanden: snål vind +10°C
 Vind: i sjöns längdriktning (SSO) 5 m/s
 Stråk: i sjöns längdriktning (N) mot land
 C_{10} : $13 \cdot 10^{-4}$, går inte att "åka kana"

Medelhastigheter (m/s) över 30-minuters intervall redovisas nedan.

Tabell 4.4 Resultat från stråk 3

avstånd från land	225 m	125 m	75 m	25 m
nivå				
0,61 m	5,22	4,00	3,92	3,50
2 m	5,77	4,56	4,50	4,17
6,2 m	6,30	5,13	5,06	4,82
W_F (cm/s)	18,6	19,3	19,8	22,7
W_O/W_C	0,85	1,0	1,0	1,04
W_F^x	15,8	19,3	19,8	23,5
W_2^x	4,90	4,56	4,50	4,33

vindriktning → → → →

Alla vindprofiler är perfekt logaritmiska. Friktionshastigheten ökar och vindhastigheten minskar något mot land.

Stråk 4 25/3 -71

Väderförhållanden: regnigt +4°C
 Vind: i sjöns längdriktning (SSV) 3 m/s
 Stråk: tvärs över hela sjön (O)
 C_{10} : $10 \cdot 10^{-4}$, vatten på isen

Medelhastigheter (m/s) över 30 minuters intervall och friktionshastigheter beräknade ur logaritmlagen redovisas nedan.

Tabell 4.5 Resultat från stråk 4

avstånd från land	5 m	55 m	105 m	180 m	330 m	480/ 175 m	100 m	50 m	5 m
nivå									
0,61 m	1,07	1,60	2,24	2,35	3,67	3,27	2,44	2,46	1,80
2 m	1,10	1,75	2,44	2,60	4,00	3,65	2,75	2,75	2,16
6,2 m	1,18	1,90	2,75	2,90	4,35	4,07	3,05	3,20	2,68
w_F (cm/s)	(2,0) ⁺	5,0	(8,9) ⁺	10,0	10,0	13,9	10,2	(13,0) ⁺	(15,4) ⁺
w_o/w_c	1,87	1,40	1,0	0,97	0,64	0,67	0,93	0,87	1,10
w_F^x (cm/s)	(3,7) ⁺	7,0	(8,9) ⁺	9,7	6,4	9,3	9,5	(11,3) ⁺	(16,0) ⁺
w_2^x (m/s)	2,05	2,45	2,44	2,52	2,56	2,45	2,55	2,38	2,38
vindriktning	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

+) Dessa profiler var inte logaritmiska. Samtliga vindhastigheter är så låga, att vattenfilmen på isen troligen har bildat en aerodynamisk slät yta. Von Kármán-profilen enligt ekvation (4.6) stämmer väl för de ovan angivna vindhastigheterna. Friktionshastigheterna kan beräknas för varje nivå varvid erhålles

Tabell 4.6 Friktionshastighet (cm/s) vid glatt yta

	5 m	55 m	105 m	180 m	330 m	-175 m	100 m	50 m	5 m
nivå									
0,61 m	4,4	6,4	8,6	9,0	13,4	12,1	9,3	9,3	7,1
2 m	4,1	6,4	8,5	9,0	13,4	12,2	9,3	9,3	7,5
6,2 m	4,0	6,1	9,0	9,0	13,4	12,4	9,3	10,0	8,4
w_F^x (cm/s)	8,2	9,0	8,6	8,7	8,6	8,2	8,6	8,1	7,8

Endast de båda sista profilerna avviker från en von Kármán-profil. För de båda lägre nivåerna stämmer emellertid även här von Kármán-profilen.

Vinden har troligen blåst över en aerodynamiskt slät yta. Det är därför riktigtast att studera den sista tabellen, tabell 4.6. Friktionshastigheten ses därvid vara konstant över hela sjöytan.

Stråk 5 26/3 -71

Väderförhållanden: solsken +3°C
 Vind: tvärs sjön (VSV) 4 m/s
 Stråk: tvärs sjön (V), mot land
 C_{10} : $8 \cdot 10^{-4}$, mycket glatt is

Medelhastigheter (m/s) över 30 minuters intervall och friktionshastigheter beräknade ur logaritmlagen redovisas nedan. Emellertid var ingen av profilerna perfekt logaritmisk.

Tabell 4.7 Resultat från stråk 5

avstånd från land	300 m	150 m	75 m	30 m	7 m
nivå					
0,61 m	3,16	3,46	3,38	2,97	2,14
2 m	3,45	3,75	3,75	3,25	2,35
6,2 m	3,78	4,08	4,14	3,59	2,60
W_F (cm/s)	10,8	11,0	13,2	10,8	7,5
W_O/W_C	1,0	0,93	0,92	0,98	1,33
W_F^x (cm/s)	10,8	10,2	12,1	10,6	10,0
W_2^x (m/s)	3,45	3,48	3,45	3,18	3,13
vindriktning	→	→	→	→	→

Eftersom isen var mycket glatt provades en von Kármán-profil. De beräknade friktionshastigheterna (cm/s) redovisas nedan.

Tabell 4.8 Friktionshastighet (cm/s) vid glatt yta

	300 m	150 m	75 m	30 m	5 m
nivå					
0,61 m	11,6	12,6	12,5	10,9	7,9
2 m	11,4	12,5	12,5	10,8	7,9
6,2 m	11,6	12,5	12,6	10,9	7,9
W_F^x (cm/s)	11,6	11,7	11,5	10,7	10,3

Isen kan således betraktas som slät. Friktionshastigheten är konstant. Vinden avtar något mot land (dock mindre än de uppskattade felens storlek). Mätresultaten visar, att vinden såsom antogs vid utvärderingarna är relativt uniform över sjöytan.

4.3.4 Resultat

I god överensstämmelse med andras resultat erhålles en släpkraftskoefficient för is

$$C_{10} = 1,0 \cdot 10^{-3} \quad [\text{sjöis } W < 6 \text{ m/s}]$$

vilket motsvarar en råhet av 0,004 cm. Om isen är så glatt, att man kan åka kana på den, kan den emellertid betraktas som aerodynamiskt slät. Vindprofilen följer då en von Kármán-profil.

Vinden är jämnt fördelad över hela sjöytan, något som torde gälla för alla sjöar av Velens storlek, eftersom Velen är omgiven av höga träd. Friktionshastigheten och därmed skjuvkraften är jämnt fördelad över hela sjöytan. Detta betyder, att derivatan $\partial \tau / \partial x$ är nära noll utom just ända inne vid strandkanten.

4.4 Vindskjuvkraft på Vombsjön

4.4.1 Mättings- och utvärderingsförfarande

I avsikt att bestämma den av vinden utövade skjuvkraften på en relativt liten vattenyta mättes under större delen av sommaren 1971 vind och temperaturprofiler över Vombsjön, som har en yta av $3 \times 5 \text{ km}^2$ och ett djup av omkring 15 m. Sjön är belägen på en slätt och således starkt exponerad för vinden.

Jämförelse mellan de i kapitel 4.1 redovisade teoretiska vindprofilerna och de i fält uppmätta vindprofilerna visar, under vilka betingelser de olika teorierna kan användas. En strävan har varit att redovisa en släpkraftskoefficient, så att ekvation (4.1) kan användas.

Samtliga mätningar har utförts som examensarbete av nuvarande civilingenjörerna Gunnar Frostberg och Anders Ekbohm.

Vindhastigheterna mättes med på en 6 m hög stång fastsatta anemometrar på nivåerna 0,5 m, 1,5 m, 3 m och 6 m över vattenytan. Den i tiden integrerade vindhastigheten, dvs. meter vindväg, avlästes var 15:de minut. Likaså avlästes ytvattentemperaturen samt lufttemperaturen på 0,5 m och 3 m nivå. Mätningarna utfördes från en flotte, vilken stabiliserades med vattenfyllda tunnor. För att undvika turbulenta störningar från flotten placerades den undre vindmätaren på en horisontell stång cirka 1 m framför flotten.

Avläsningsnoggrannheten under ett 15-minuters intervall var c:a 0,04 m/s. Eftersom flotten rullade något och enär den undre mätaren befann sig långt från svängningscentrum, varierade mätthöjden för denna mätare kring jämviktsnivån, något som torde ha givit något för låg vindhastighet. Till vindmätarna hör kalibreringskurvor. Vindmätarna kontrollerades dock med en mycket stor dammsugare. Den nedersta vindmätaren befanns visa 7,5 % för låg vindhastighet. De övriga tre vindmätarna uppvisade inte någon gång en större inbördes avvikelser än 0,4 %.

Mätningar under så lång tid, att förhållandena var ungefär stationära, slogs ihop till en serie, för vilken medelvärdena utnyttjades. I första hand prövades om en von Kármán-profil (ekv. 4.6) eller en rent logaritmisk vindprofil (ekv. 4.4) kunde användas. Vid icke-neutral luftskiktning prövades $\log + \ln$ -lagen (ekv. 4.11).

Den totala effektiva mättiden var cirka 150 timmar, under vilka 600 profiler avlästes. Drygt hälften av dessa mätningar utfördes mitt i sjön, under det att de övriga mätningarna utfördes cirka 500 m från land. Mätserier om minst två intervall, dvs. medelvärden under minst 30 minuter, har behandlats. Från sjömitt kunde samtliga serier, 76 timmars mätningar, utvärderas. Vid stranden verkar luftskiktningen ha spelat stor roll. Inte ens till hälften av de uppmätta vindprofilerna kunde någon teoretisk profil anpassas.

4.4.2 Mätresultat i sjömitt

På följande sidor redovisas i kronologisk ordning samtliga mätserier om minst 30 minuter. Ett parentesvärde vid en uppmätt vind anger, att nivån avviker från den från början angivna nivån. g anger glatt strömning.

Tabell 4.9 Mätresultat från sjömitt

nummer	antal	W ₁₀ (m/s)	W _F (cm/s)	vind (m/s)	temp. °C		differens	y•
					luft	3-0,5 m		
				0,52 m	1,5 m	3,0 m	5,64 m	
1	5	4,2	10	3,68 (50)	3,78	4,12	4,17	-1,6
2	3	7,6	20	6,35 (50)	7,15	7,15	7,50	-1,3
3	2	6,8	20 g	5,40 (50)	6,25	6,42	6,61	-0,5
4	4	5,5	15	4,55 (50)	5,04	5,22	5,35	-0,2
5	8	5,3	17	4,32 (50)	4,95	5,10	5,22	0
6	2	6,8	23	5,15 (50)	6,05	6,28	6,58	+0,5
7	5	7,6	26	6,0 (50)	6,77	7,21	7,56	+0,1
8	2	10,3	33	7,60 (50)	8,75	9,32	9,86	+2,9
9	2	9,3	25	7,0 (50)	8,03	8,53	8,81	+2,6
10	4	10,5	43	7,46 (50)	9,01	9,76	10,15	+2,9
11	8	9,6	30	7,23 (50)	8,32	8,85	9,10	+3,1
12	5	3,5	11 g	2,80 (56)	3,01	3,29	3,38	0
13	8	2,4	7 g	1,64 (56)	1,84	2,13	2,30	0
14	2	1,3	4 g	1,00 (56)	1,25	1,25	1,25	-0,4
15	7	3,2	9	2,21 (56)	2,53	2,80	3,10	+5,0
16	3	2,7	7	1,65	1,94	2,26	2,56	+4,0
17	5	4,0	11	2,70	2,97	3,32	3,85	+3,4
18	11	3,8	11 g	2,79	3,11	3,31	3,61	+1,0
19	5	1,2	4	0,90	0,95	1,10	1,11	0
20	4	1,1	5	0,90	0,93	1,0	1,0	+5,5
21	7	5,4	16 g	4,32	4,72	4,95	5,35	-0,6
22	4	3,7	11 g	2,86	3,05	3,25	3,62	+0,3
23	3	1,7	3	1,46	1,54	1,57	1,63	+0,9
24	3	2,1	7	1,84	1,98	2,03	2,05	-1,1
25	2	1,3	3	1,0	1,05	1,18	1,23	-0,4
26	15	4,8	14 g	3,70	4,11	4,33	4,68	-0,1
27	3	2,7	8 g	2,02	2,27	2,39	2,56	0
28	9	8,0	26	6,17	7,08	7,34	7,79	+1,0
29	9	9,2	30	6,91	7,74	8,30	8,72	+2,0
30	3	9,6	31	7,33	8,07	8,45	9,19	+2,0

nummer	antal intervall	W ₁₀ (m/s) uppskattad	W _F (cm/s)	vind (m/s)		1,5 m	3,0 m	5,64 m	temp. °C luft	3-0,5 m	differens 0,5 m-vatten konst.	γ
				0,52 m								
31	4	10,0	31	7,67		8,50	8,85	9,65	20	0	+1,6	-
32	4	10,6	37	7,90		8,90	9,50	10,17	19	0	+1,4	-
33	5	11,1	40	8,07		9,14	9,93	10,60	19	0	+1,3	-
34	2	10,8	42	7,70		8,58	9,44	10,18	19	-0,1	+1,3	0
35	3	11,8	48	8,40		9,58	10,50	11,40	19	0	+1,2	-
36	3	9,8	35	7,15		8,04	8,65	9,33	19	-0,4	+1,5	5
37	6	3,0		2,22	g	2,57	2,75	2,82	21	-	+1,3	-
38	7	4,0	12	2,94	g	3,41	3,63	3,80	23	-	+2,7	-
39	7	5,7	20	4,17		4,75	5,06	5,42	23	-	+2,9	-
40	4	6,7	24	4,97		5,67	6,06	6,43	23	+0,2	+2,3	0
41	4	7,5	28	5,54		6,49	6,78	7,19	22	+0,2	+2,5	0
42	2	1,5	13	0,92		1,31	1,44	1,45	24	-0,5	+2,0	0,7
43	3	4,1	17	3,13		3,63	3,94	4,04	24	-0,5	+1,8	0
44	11	5,1	22	3,75		4,39	4,80	4,97	24	-	+2,3	-
45	2	8,3	31	5,92		6,75	7,28	7,78	24	+0,2	+2,5	0
46	3	7,3	27	5,44		5,98	6,70	7,06	24	-0,2	+2,8	0
47	8	6,8	20	5,39		6,03	6,29	6,56	21	+0,1	+1,0	19
48	10	7,9	24	5,94		6,72	7,04	7,47	20	-	+1,1	-
49	15	2,5	7	2,40		2,47	2,50	2,50	16	-0,4	-5,0	0,6
50	6	3,7	12	3,19		3,47	3,58	3,65	16	-0,7	-5,0	1
51	7	4,3	15	3,62		4,04	4,10	4,21	14	-0,9	-6,0	1
52	13	4,8	18	4,04		4,48	4,61	4,73	13	-0,7	-6,5	1
53	2	7,0	22	5,58		6,19	6,33	6,67	18	-0,2	-2,0	0,5
54	3	9,7	36	7,54		8,62	8,83	9,30	18	-0,2	-1,6	8
55	2	11,2	38	8,33		9,36	9,89	10,50	18	-0,1	-0,9	0
56	16	11,2	40	8,07		9,08	9,76	10,46	18	-0,3	-1,4	0

Medelvärdena redovisas i nedanstående tabell. Luftskiktning med temperaturgradient mindre än $0,080^\circ \text{C/m}$ räknas som neutral. g anger, att för samtliga tidsintervall följer vindprofilen von Kármáns lag för glatt strömning. Ett parentesvärde anger det antal intervall, för vilka strömningen var dynamiskt glatt.

Tabell 4.10 Medelvärden ur samtliga vindprofiler

W_{10} m/s	W_F cm/s	C_{10} $\cdot 10^{-4}$	antal 15-min. intervall				W_F			$\gamma \cdot \text{konst.}$	
			to- talt	neutr. skiktn	sta- bil	in- stab.	neut- ral	sta- bil	in- stab.	sta- bil	in- stab.
<2	4	8	18	2	0	16	3	-	5	-	0,1
2-3	7	8	32	11 g	3	18	7	7	7	1,5	0,6
3-3,5	9	8	13	6 g	7	0	9	9	-	1,5	-
3,5-4	11	8,5	33	23 g	4 g	6	11	11	12	g	1,0
4-4,5	13	9,5	20	5	5	10	10	11	15	1,5	0,7
4,5-5	16	11	28	15 g	0	13	14	-	18	-	1,0
5-5,5	18	12	30	23	7 g	0	19	16	-	g	-
5,5-6	20	12	7	7	0	0	20	-	-	-	-
6-6,5	-	-	0	0	0	0	-	-	-	-	-
6,5-7	21	11	16	16 (2)	0	0	21	-	-	-	-
7-7,5	25	12	5	5	0	0	25	-	-	-	-
7,5-8	26	11	31	14	17	0	26	26	-	3	-
8-8,5	31	14	2	2	0	0	31	-	-	-	-
8,5-9	-	-	0	0	0	0	-	-	-	-	-
9-9,5	30	11	11	9	2	0	30	25	-	11	-
9,5-10	32	11	21	10	8	3	33	30	35	10	5
10-10,5	33	10,5	2	0	2	0	-	33	-	11	-
10,5-11	40	13,5	10	6	4	0	38	43	-	11	-
11-12	41	13	26	10	0	16	42	-	40	-	0

För neutral skiktning kan vindprofilen betecknas som glatt för vindhastigheter lägre än 5 m/s. Oavsett skiktning kan skjuvkraften beräknas ur ekvation (4.1) om $c = 0$ och $C_{10} = 9 \cdot 10^{-4}$. För vindhastigheter större än 5 m/s är släpkraftskoefficienten ungefär konstant

$$C_{10} = 1,2 \cdot 10^{-3} \quad [W > 4,5 \text{ m/s, oavsett luftskiktning}]$$

Råhetsgraden för vattenytan blir för höga vindar cirka 0,01 cm.

$\gamma \cdot \text{konst}$ är för låga vindhastigheter cirka 1,5 vid stabil och cirka 0,7 vid instabil skiktning. Vid höga vindstyrkor är $\gamma \cdot \text{konst}$ betydligt större, omkring 10 för stabil skiktning, men det linjära bidraget i ekvation (4.11) har dock på grund av den stora hastighetsgradienten föga betydelse.

Om endast mätserier om minst fem intervall (75 min) utnyttjas, blir släpkraftskoefficienten oförändrad för vindar mindre än 6 m/s men sjunker något, $C_{10} = 1,1 \cdot 10^{-3}$ för högre vindstyrkor. Vattenytans råhet blir då 0,006 cm.

4.4.3 Mätresultat vid stranden

500 m från land stämde teoretiska vindprofiler endast med 40 % av de uppmätta. Dessa mätserier redovisas i kronologisk ordning i tabell 4.11. För mätserie 5 och 6 är den lägre nivån 54 cm; g anger, att vindprofilen följer ekvation (4.6). De två-tre nedersta vindvärdena tyder för flertalet profiler på en glatt strömming. Högre upp tycks luftens skiktning inverka. (För tabell 4.11 se följande sida.)

Medelvärdena redovisas i tabell 4.12.

Tabell 4.12 Medelvärden för vindprofilerna enligt tabell 4.11

W_{10} m/s	W_F cm/s	antal 15-min. intervall				$C_{10} \cdot 10^4$
		totalt	neutr.	stabil	instab.	
< 2	4	5	5 g	0	0	7
2-3	5	5	2 g	0	3	5
3-4	13	19	17	0	2 g	14
4-5	15	37	11 g	8 g	18	11
5-6	6	16	16	0	0	1
6-7	11	27	11	16	0	3

Den enda slutsats som kan dragas är, att mätningarna inte tillfredsställande kan analyseras med den använda utbyteskoefficienthypotesen.

4.4.4 Slutresultat

Vid låga vindstyrkor, $W < 5$ m/s, är vattenytan aerodynamiskt slät. Släpkraftskoefficienten är relativt oberoende av vindstyrka och luftskiktning. Relaterad till 10-metersnivån är släpkraftskoefficienten $1,1-1,2 \cdot 10^{-3}$.

Tabell 4.11 Mätresultat 500 m från stranden

nummer	antal intervall	W ₁₀ (m/s) uppskattad	W _P (cm/s)	vind (m/s)			temp. °C luft	differens		γ : konst
				0,52 m	1,50 m	3,0 m		3-0,5 m	0,5 m	
1	4	6,8	9	6,15	6,40	6,55	21	-0,2	2,2	0,5
2	7	6,5	5	5,90	6,18	6,22	21	0	+1,0	-
3	3	4,6	6	4,18	4,37	4,43	21	-0,4	+1,4	0
4	3	2,9	4	2,63	2,73	2,77	21	-0,5	+2,0	0,1
5	5	1,3	4	1,07	1,28	1,31	24	+0,2	+2,5	-
6	2	2,1	7	1,75	1,98	2,06	24	+0,2	+1,9	-
7	6	4,3	13	3,44	3,88	4,10	21	+0,1	+0,9	-
8	13	3,8	14	3,03	3,45	3,62	21	0	+1,2	-
9	5	4,7	15	4,01	4,45	4,63	21	+0,2	+1,8	-
10	16	6,2	14	5,15	5,60	5,82	23	+0,4	+2,0	0
11	4	4,0	8	3,50	3,80	3,86	23	-0,1	+0,2	2
12	16	5,6	6	5,12	5,27	5,34	23	0	0	-
13	8	4,2	13	3,39	3,82	4,02	24	+0,5	+1,3	-
14	2	4,5	15	4,06	4,50	4,50	22	-0,3	-0,9	-
15	2	3,5	12	3,20	3,50	3,50	15	-0,3	-4,0	-
16	13	4,7	15	4,25	4,65	4,65	18	-0,3	-0,5	-

Litteratur

1. Bellaire, F.R. [1965]. The modification of warm air moving over cold water. - Proc. 8:th Conf. Great Lakes Res., p. 249-256.
2. Bengtsson, L. [1973]. Wind stress on small lakes. - Bulletin Ser. A 16, Div. of Hydraulics, University of Lund.
3. Blackadar, A.K. [1962]. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. - J. Geoph. Res. 67 (8), p. 3095-3102.
4. Bruce, J.P., Anderson, D.V. och Rodgers, G.K. [1961]. Temperature, humidity and wind profiles over the Great Lakes. - Proc. 4:th Conf. Great Lakes Res., p. 65-70.
5. Cohen, L.D., m.fl. [1972]. Steady-state vertical turbulent diffusion of radon. - J. Geophys. Res. 77 (15), p. 2654-2668.
6. Deacon, E.L. [1948]. Vertical diffusion in the lowest layers of the atmosphere. - Quart. J. of the Royal Met. Soc. 75, p. 81-103.
7. Deacon, E.L. [1962]. - Aerodynamic roughness of the sea. - J. Geophys. Res. 67 (8), p. 3167-3172.
8. Hellström, B. [1953]. Wind effect on Ringkøbing fjord. - Trans. Amer. Geoph. Union 34 (2), p. 194-198.
9. Jones, D.L. och Bellaire, F.R. [1962]. A numerical procedure for computing winddriven currents on the Great Lakes. - Proc. 5:th Conf. Great Lakes Res., p. 93-102.
10. Kondo, J., Fujinawa, Y. och Naito, G. [1972]. Wave-induced wind fluctuation over the sea. - J. Fluid Mech. 51 (4), p. 751-771.
11. Monin, A.S. [1962]. Empirical data on turbulence in the surface layer of the atmosphere. - J. Geophys. Res. 67 (8), p. 3103-3109.
12. Monin, A.S. [1970]. The atmospheric boundary layer. - Annual review of Fluid Mech. 2, p. 225-250.
13. Monin, A.S. [1972]. Turbulence and diffusion in stratified flows. - Int. symp. on stratified flows, lecture 4 (Novosibirsk).
14. Munk, W.H. [1947]. A critical wind speed for air-sea-boundary processes. - J. Marine Res. 6 (3), p. 203-218.
15. Neuman, G. [1959]. Notes on the stress of light winds on the sea. - Bull. Amer. meteor. Soc. 40 (3), p. 146-148.
16. Panofski, H.A. [1962]. The budget of turbulent energy in the lowest 100 meters. - J. Geophys. Res. 67 (8), p. 3161-3165.
17. Portman, D.J., Elder, F.C. och Ryznar, E. [1961]. Research on energy exchange processes (summer 1960). - Proc. 4:th Conf. Great Lakes Res., p. 96-109.
18. Rossby, C.G. och Montgomery, R.B. [1936]. On the momentum transfer at the sea surface - Papers in physical oceanography and met. 4 (3), M.I.T.
19. Ryznar, E. och Portman, D.J. [1964]. Some wind stress computations from Lake Michigan tower data. - Proc. 7:th Conf. Great Lakes Res., p. 321.

20. Seifert, W.J. och Langleben, M.P. [1972]. Air drag coefficient and roughness length of a cover of sea ice. - J. Geophys. Res. 77 (15), p. 2708-2713.
21. Stewart, R.W. [1961]. The wave drag of wind over water. - J. Fluid Mech. 10, p. 189-194.
22. Stewart, R.W. [1966]. Air-sea interaction from the small scale. - 2:nd Int. Oceanogr. Congress, Moscow, p. 21-27.
23. Untersteiner, N. och Badgley, F.I. [1965]. The roughness parameters of sea ice. - J. Geophys. Res. 70, p. 4573-4577.
24. Wilson, B.W. [1960]. Note on surface wind stress over water at low and high wind speeds. - J. Geophys. Res. 65 (10), p. 3377-3382.

Kapitel 5. VIRVELVISKOSITET OCH DIFFUSIVITET

5.1 Inledning - begreppsförklaring

5.2 Turbulent diffusionsteori

- .1 Diffusionsekvationen
- .2 Korrelationsfunktioner
- .3 Samband varians - diffusivitet
- .4 Relativ diffusion
- .5 Nya spridningsekvationer
- .6 Dispersion
- .7 Inverkan av densitetsskiktning
- .8 Energifördelning

5.3 Resultat från litteraturen

- .1 Horisontella spridningsförsök
- .2 Horisontella korrelationsstudier
- .3 Vertikala färgförsök
- .4 Vertikala korrelationsstudier

5.4 Horisontella spridningskoefficienter ur färgförsök

- .1 Mätplatser
- .2 Utförande
- .3 Resultat

5.5 Spridningssimuleringar

- .1 Stokastiska spridningsmodeller
- .2 Teoretiska simuleringar
- .3 Korrelationsstudier i Yddingen
- .4 Spridningssimuleringar i Yddingen

5.6 Vertikala utbyteskoefficienter

- .1 Färgförsök
- .2 Strömmättningsförsök
- .3 Skenbar temperatordiffusivitet

Litteratur

Sammanfattning

Teorier för turbulent diffusion genomgås. Resultat från litteraturen tyder på, att det finns en småskalig turbulens, för vilken spridningen sker med en konstant diffusivitet, och en storskalig turbulens, för vilken spridningen följer "4/3-lagen". Färgförsök i vattenytan i några sydsvenska sjöar ger konstanta relativa diffusiviteter i longitudinell och lateral riktning på cirka $300 \text{ cm}^2/\text{s}$ respektive $40 \text{ cm}^2/\text{s}$. Den turbulenta spridningen kan simuleras med stokastiska modeller, i vilka hänsyn tas till korrelationen mellan fluktuationer i olika riktningar och vid olika tidpunkter.

Den vertikala utbyteskoefficienten befinnes genom färg och strömmättningsförsök vara av storleksordningen $5 \text{ cm}^2/\text{s}$ och starkt vindberoende.

- Figurer
- 5.1 Longitudinella avståndsfunktionen
Longitudinal length correlation function
 - .2 Transversella avståndsfunktionen
Transverse length correlation function
 - .3 Jämförelse mellan Lagranges och Eulers tidskorrelation
Comparison between Lagrangian and Eulerian time correlation
 - .4 Diffusionskoefficienten som funktion av tiden
Diffusion coefficient vs. time
 - .5 Dispersionskoefficient som funktion av tiden
Dispersion coefficient vs. time
 - .6 Energiinnehåll och energidissipation som funktion av vågtalet
Energy content and energy dissipation vs. wave number
 - .7 Horisontella variansen som funktion av diffusionstiden (Okubo)
Horizontal variance vs. diffusion time
 - .8 Diffusiviteten som funktion av diffusionsskalan (Okubo)
Diffusivity vs. scale of diffusion
 - .9 Longitudinell spridningskoefficient som funktion av diffusionstiden (Mien-serie nummer 1)
Longitudinal dispersion coefficient vs. diffusion time (Lake Mien)
 - .10 Koncentrationsfördelning (90,50,20 % av maximivärdet) efter 30 minuter vid utsläpp med (till vänster) resp. utan hastighetsgradient
Concentration distribution of tracer (90,50,20 % of the maximum value) 30 minutes after injection with (to the left) and without velocity gradient
 - .11 Mätuppställning vid korrelationsstudier
Arrangement for measurements of stream velocity correlations
 - .12 Transversella avståndsfunktionen för fluktuationer i strömriktningen (Yddingen)
Transverse length correlation function for fluctuations in the direction of the current (Lake Yddingen)
 - .13 Spridningskaraktistikors ändring med tiden (Yddingen)
Dispersion characteristics vs. time (Lake Yddingen)
 - .14 Vertikal utbyteskoefficienten som funktion av vindhastigheten
Vertical exchange coefficient vs. wind speed

- Tabeller
- 5.1 Resultat från stokastiska laboratoriestudier (Engelund-Hansen)
Results of stochastic laboratory studies (Engelund-Hansen)
 - .2 Vertikal diffusionskoefficient (Kullenberg)
Vertical diffusion coefficient (Kullenberg)
 - .3 Horisontella diffusiviteter (Mien, Yddingen, Vombsjön)
Horizontal diffusivities (Lake Mien, Lake Yddingen, Lake Vomb)
 - .4 Relativ diffusivitet ur separationsmodellen
Relative diffusivity from model of separation
 - .5 Resultat från korrelationsstudier i Yddingen
Results of correlation studies in Lake Yddingen
 - .6 Resultat från spridningssimuleringar i Yddingen
Results from dispersion simulations in Lake Yddingen

- .7 Relativ vertikal diffusivitet från färgförsök (Mien, Vombsjön)
Relative vertical diffusivity from dye experiments (Lake Mien, Lake Vomb)
- .8 Vertikal virvelviskositet från strömmätningar (Mien, Velen, Vombsjön)
Vertical eddy viscosity from current measurements (Lake Mien, Lake Velen, Lake Vomb)

Ekvationer 5.1-41

Speciella beteckningar

c	= masskoncentration
D	= turbulent diffusionskoefficient med index x, y, z eller long, lat, hor för riktning, och index abs, rel för absolut resp. relativ
E	= spridningskoefficient som index: betraktelsesätt enligt Euler
$E(k)$	= energispektrumfunktion
$f(x')$	= hastighetskorrelation mellan partiklar på avståndet x' i strömriktningen
$g(y')$	= hastighetskorrelation mellan partiklar på avståndet y' transversellt strömriktningen
k	= vågtal
k_z	= vertikal temperaturdiffusivitet
l	= turbulent längdskala
L	= turbulent Lagranges (index L) eller Eulers (index E) längdskala. Även riktningsindex kan förekomma. som index: betraktelsesätt enligt Lagrange
N	= Brunt-Väisälä frekvens
P	= spridningshastighet
r	= radiellt avstånd
$r(t')$	= hastighetskorrelation för tidsintervallet t' . Eventuellt index E, L
r_{ij}	= hastighetskorrelation mellan fluktuationer i riktning i och j
t'	= tidsintervall
T	= turbulent tidskala. Index E eller L samt ev. riktning
U_F	= friktionshastighet vid botten
$\bar{X}$	= spridningsavstånd
$\bar{X}^2$	= spridningsavståndens varians
α	= förhållande mellan Eulers och Lagranges längdskala
β	= tidsförstoringsfaktor vid övergång från Eulers till Lagranges betraktelsesätt
$\Sigma(k)$	= energitransporthastighet
Σ_0	= energidissipationshastighet
ν	= normalfördelat slumpstal

5.1 Inledning - begreppsförklaring

Vid laminär strömning bestäms utbytet av rörelsemängd av viskositeten och spridningen av massa av den molekylära diffusiviteten. De allmänna rörelseekvationerna samt diffusionsekvationen kan användas. Ju mera oregelbunden strömningen är, desto mindre roll spelar det molekylära utbytet. Strömningen är turbulent och spridningen sker genom turbulenta virvlar.

För att kunna beräkna olika turbulenta processer måste "turbulensen" emellertid ges numeriskt värde och dimension. För att få en analogi till den laminära strömningen införes turbulenta utbyteskoefficienter, ν -virvelviskositet för utbytet av rörelsemängd, D -diffusivitet för utbytet av massa och k -temperaturdiffusivitet för utbytet av värme. Därvid kan de allmänna ekvationerna (3.14-3.18) användas också för turbulent strömning. Utbyteskoefficienterna är emellertid inga materialkonstanter utan beror av flödet.

Vid spridningsstudier är det svårt att skilja den rent turbulenta spridningen från den spridning, som orsakas av olikheter i hastighetsfältet. Med diffusion avses den rent turbulenta spridningen. De tillhörande koefficienterna benämnes diffusiviteter eller med ett sammanfattande namn turbulenta utbyteskoefficienter. Med dispersion avses en spridningsmekanism, som inkluderar advektiv och konvektiv spridning. Spridningen beskrivs med dispersionskoefficienter.

Om spridningen studeras från en fix punkt, talar man om absolut diffusion. Om koncentrationsfältet studeras i ett rörligt koordinatsystem med utgångspunkt från koncentrationsmaxima, talar man om relativ diffusion.

5.2 Turbulent diffusionsteori

5.2.1 Diffusionsekvationen

Den molekylära spridningen av massa, koncentrationsutspädning, kan bestämmas med hjälp av den allmänna diffusionsekvationen.

$$\frac{dc}{dt} = D \nabla^2 c \quad (5.1)$$

där c = koncentrationen

D = en molekylär diffusionskoefficient (för vatten $\cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$)

Vid turbulent strömning kan medelströmningen studeras, om turbulenta diffusionskoefficienter införes. Högra ledet i ekvation (5.1) blir då

$$H.L = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad (5.2)$$

sedan vänster led utvecklats på samma sätt som vänster led i värmeekvation (3.3, 9, 18). D_x , D_y , D_z är turbulenta diffusionskoefficienter.

Dessa diffusionskoefficienter är dock inte konstanta. Vid molekylär rörelse är en partikels rörelse inte beroende av de närbelägna partik-

larnas rörelser. Vid turbulent rörelse bidrar med ökat avstånd allt större virvlar till separation av från början närbelägna partiklar. Till att börja med förflyttas närbelägna partiklar som en klump av de större virvlarna men som individer och med separation som följd av de små virvlarna. I ett relativt system bidrar först endast små virvlar men sedan alla virvlar till spridningen. I ett fixt system sker spridningen först genom alla virvlar men på långt avstånd från källan enbart genom de största virvlarna.

5.2.2 Korrelationsfunktioner

Vid turbulent diffusion finns en korrelation, r , mellan en partikels hastighet från en tidpunkt, t , till en annan, $t + t'$. Om turbulensen är homogen och stationär i tiden så gäller

$$r(t') = \overline{u'(t) \cdot u'(t + t')} / \underline{u'}^2 \quad (5.3)$$

där som i kapitel 2 primmade hastighetstermer anger fluktuationer kring ett medelvärde, och där understruken term anger standardavvikelsen, som är konstant, om turbulensen är homogen. Om uttrycket ovan integreras från tiden 0 till tiden t , erhålles

$$\underline{u'}^2 \int_0^t r(t') dt' = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{X^2} \quad (5.4)$$

där X = det avstånd i x -riktningen, som en partikel rört sig under tiden t p.g.a. de turbulenta fluktuationerna.

Korrelationskoefficienten r måste gå mot 1 då $t' \rightarrow 0$ och mot 0 då $t' \rightarrow \infty$. Därför måste gälla

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{X^2} = \underline{u'}^2 \cdot t, \quad \text{då } t \text{ är litet} \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{X^2} = \underline{u'}^2 \cdot T_L, \quad \text{då } t \text{ är stort} \quad (5.6)$$

där T_L är Lagranges turbulenta tidskala definierad enligt

$$T_L = \int_0^\infty r(t') dt' \quad (5.7)$$

Det är uppenbart, att också en Lagranges längdskala kan definieras

$$L_L = \underline{u'} \cdot T_L \quad (5.8)$$

vilken vid turbulent strömning kan betrakas som motsvarigheten till fria medelväglängden vid molekylär diffusion.

Turbulensen kan även studeras utifrån en fix punkt. Nu är hastighetsfluktuationerna inte längre knutna till en bestämd partikel utan till en bestämd punkt. Detta är ett s.k. Eulerskt betraktelsesätt. Vid homogen turbulens är fluktuationernas storlek lika utifrån båda betraktelsesätten. Med betraktelsesätt enligt Euler kan man bestämma kor-

relationen f mellan hastighetsfluktuationer i punkten x och i punkten $x + x'$.

$$f(x') = \overline{u'(x) \cdot u'(x + x')} / \underline{u}^2 \quad (5.9)$$

Även den transversella korrelationen, g , kan bestämmas

$$g(y') = \overline{u'(y) \cdot u'(y + y')} / \underline{u}^2 \quad (5.10)$$

Dessa korrelationsfunktioners utseende vid isotrop turbulens framgår av figur 5.1 och 5.2.

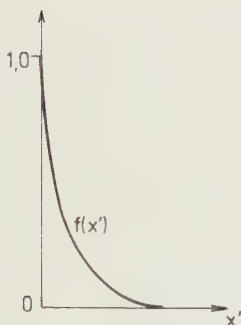


Fig. 5.1 Longitudinella avståndsfunktionen



Fig. 5.2 Transversella avståndsfunktionen

En turbulent Eulers längdskala, vilken kan ses som en genomsnittlig storlek av de turbulenta virvlarna, definieras som ytan under funktionen i figur 5.1 eller som

$$L_E = \int_0^{\infty} f_E(x') dx' \quad (5.11)$$

Vid isotrop turbulens gäller dessutom

$$L_E = 2 \int_0^{\infty} g(y') dy' = 2 \cdot L_{Ey} \quad (5.12)$$

Vid isotrop turbulens måste riktningskorrelationen

$$r_{xy} = \overline{u' \cdot v'} / \underline{u} \cdot \underline{v} \quad (5.13)$$

vara lika med noll.

Enligt Taylors hypotes gäller med god tillnärmelse vid liten turbulensgrad

$$\partial/\partial x = 1/u \cdot \partial/\partial t$$

$$\text{dvs. } T_E = L_E / u \quad (5.14)$$

där u är medelströmmen och T_E är en Eulers tidskala. Även med Eulers betraktelsesätt kan helt i analogi med ekvation (5.3) en tidskorrelationsfunktion bestämmas. Dessa båda tidskorrelationer, vilka visas i figur 5.3, antages vara affina, så att

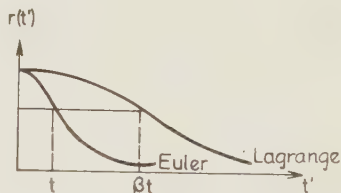
$$r_L(\beta t) = r_E(t) \quad (5.15)$$

där β är en dimensionslös faktor

$$\beta = u/(\alpha \underline{u}') \quad (5.16)$$

Vid försök har man funnit $\alpha = 2,26$ för atmosfäriska förhållanden.

Fig. 5.3 Jämförelse mellan Lagranges och Eulers tidskala



Den definitionsmässigt korrekta Eulerska tidskalan erhålles naturligtvis på samma sätt som Lagranges (ekv. 5.7). Därför måste gälla

$$T_L = \beta \cdot T_E \quad (5.17)$$

$$\text{och } L_E = \alpha \cdot L_L \quad (5.18)$$

5.2.3 Samband varians - diffusivitet

Diffusionsekvationen (5.1) i en dimension har för ett momentant utsläpp lösningen nedan, om utsläppt massa omedelbart jämnt fördelas över tvärsnittsarean.

$$c = \frac{\text{momentant utsläppt volym}}{\text{momentan utbredningsarea}} \cdot \phi \quad (5.19)$$

$$\phi = (4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp(-(x - ut)^2 / 4Dt)$$

Det sista uttrycket är en normalfördelning med medelvärde $u \cdot t$ och variansen $2 \cdot Dt$. I ekvation (5.4) bestäms variansen för avståndet mellan från början närbelägna partiklar. Diffusionskoefficienten kan därför, om koncentrationfördelningen är normalfördelad, bestämmas enligt

$$D_x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{x^2} \quad (5.20)$$

Diffusionskoefficienten ökar med diffusionstiden enligt figur 5.4 för att efter lång tid antaga ett asymptotvärde, definierat som diffusiviteten, som enligt ekvationerna (5.6) och (5.20) kan uttryckas som

$$D = \underline{u'}^2 \cdot T_L \quad (5.21)$$

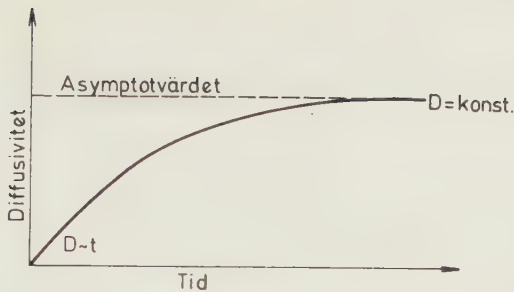


Fig. 5.4 Diffusionskoefficienten som funktion av tiden.

Att koncentrationsfördelningen är ungefär normalfördelad har visats av bland andra Elder [15], Csanady [12] och av Batchelor [5].

Om turbulensen inte är isotrop, så är riktningskorrelationskoefficienten enligt ekvation (5.13) skild från noll, och om fluktuationer kan ske i alla riktningar, så kan diffusivitetsvärden definieras enligt

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{x_i x_j} \quad (5.22)$$

vilket ju är en generalisering av ekvation (5.20).

5.2.4 Relativ diffusion

Diffusionen av en vätskemassa relativt en fix punkt bestäms av vätskemassans ursprungliga läge och av den sannolika koncentrationsfördelningsfunktionen för en enda partikel. De statistiska egenskaperna för koncentrationsfältet i ett rörligt koordinatsystem avviker från koncentrationsfältet i ett fixt koordinatsystem, eftersom i det förra fallet även origos läge ändrar sig slumpartat. För varianterna och hastighetsfluktuationerna gäller enligt Batchelor [5] och Csanady [14]

$$X^2(\text{abs}) = X^2(\text{rel}) + X^2(\text{centrum})$$

$$u(\text{abs}) = u(\text{rel}) + u(\text{centrum})$$

När koncentrationsfältet blir stort kan inte längre turbulensen påverka centrumets rörelse: $u(\text{abs})$ är oberoende av $u(\text{centrum})$. Variansen och därvid diffusivitetsvärdet, ekvation (5.20) blir, om turbulensen är homogen, dubbelt så stora som vid absolut diffusion.

$$D_{\text{rel}} = 2 \cdot D_{\text{abs}} \quad (5.23)$$

Enligt Batchelors [5] analys av relativ turbulent diffusion existerar det tre skeden. I första skedet är diffusionskoefficienten proportionell mot tiden enligt ekvation (5.5). I mellanskedet karakteriseras de diffusionsbidragande virvlarna av energidissipationshastigheten Σ_0 , och diffusiviteten växer som längdskalan, upphöjd till $4/3$

$$D_{\text{rel}} = C_1 \cdot \Sigma_0^{1/3} l^{4/3} = C_2 \cdot \Sigma_0 (t - C_3 \Sigma_0^{-1/3} X_0^{2/3})^2 \quad (5.24)$$

där X_0 är den momentana standardavvikelsen och C är konstanter. Ekvation (5.24) är den s.k. $4/3$ -lagen. I detta område gäller enligt Stommel [36]

$$D_{\text{rel}} = 3,03 D_{\text{abs}} \quad (5.25)$$

Till slut antar den relativa diffusiviteten ett konstant värde enligt ekvation (5.6; 5.21).

5.2.5 Nya spridningsekvationer

Eftersom diffusionskoefficienterna inte är konstanta beskrivs koncentrationsutspädningen dåligt av den klassiska diffusionsekvationen (5.1). Richardson introducerade därför $4/3$ -lagen, ekvation (5.24). En mängd data bekräftar existensen av $4/3$ -lagen, något som analyseras närmare i avsnitt 5.3.

Joseph och Sendner [25] har behandlat isotrop och helt horisontell diffusion genom att betrakta partiklars slumpartade rörelser i ett diffusionsfält och därvid kommit fram till ekvationen

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P \cdot r^2}{2} \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} \right) \quad (5.26)$$

där P = separationshastighet
 r = radiellt avstånd

Ekvation (5.26) leder fram till begreppet relativ diffusion med relativa diffusiviteten

$$D_{\text{rel}} = P \cdot r/2 \quad (5.27)$$

Enligt Noble [31] beskrivs den horisontella diffusionen väl av Joseph-Sendners ekvation. Nobles egna och andra av honom refererade undersökningar visar, att ekvationen endast gäller, då separationshastigheten är konstant inom intervallet $0,3 - 1$ cm/s, och då relativa diffusiviteten har värden i området $10^4 - 10^8$ cm²/s.

5.2.6 Dispersion

Om variationer i hastighetsfältet förekommer, så kommer dessa att intensifiera spridningen av massa, rörelsemängd och värme.

Spridningen av ett utsläpp i en kanal är först tredimensionell, men då utsläppsmolnet fyller hela bredden eller hela djupet, kan spridningen betraktas som tvådimensionell, och då utsläppsmolnet fyller hela tvärsnittet, kan spridningen betraktas som endimensionell. Diffusionsekvationen får enligt Holley [22] utseendet

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (5.28)$$

där E = dispersionskoefficient. Ekvation (5.28) kan gälla först sedan spårämnet fyller hela tvärsektionen och först sedan tillräcklig likformighet i lateral riktning uppnåtts.

Elder [15] utgår från den turbulenta diffusionsekvationen (5.1-2) i två dimensioner och integrerar den över djupet, h . Genom att förutsätta strömning i en riktning med en logaritmisk hastighetsfördelning och ett likformigt utbyte av rörelsemängd och massa erhåller han i strömriktningen en dispersionskoefficient, i vilken spridningen p.g.a. vertikala hastighetsgradienter är inkluderad.

$$E = 5,93 \cdot h \cdot U_F \quad (5.29)$$

där U_F = friktionshastigheten vid botten = $(\tau_B/\rho)^{\frac{1}{2}}$.

Den rent turbulenta diffusionen svarar endast för en ringa del av spridningen. För isotrop turbulens visar Elder, att en diffusionskoefficient kan beräknas enligt ekvation (5.29) med en koefficient = 0,07.

Dispersionskoefficienten i ekvation (5.29) bekräftas väl av Elders experiment. För den laterala spridningen erhåller Elder vid sina laboratoriestudier en dispersionskoefficient enligt ekvation (5.29) men med koefficienten 0,23.

Effekten av olikheter i hastighetsfältet visas mera generellt av Carter och Okubo [10]. Variansen för en momentant utsläppt partikels läge blir

$$\overline{x^2} = 2 D_x t + \left\{ \frac{2}{3} D_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{6} D_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} t^3 \quad (5.30)$$

där D 'na är de turbulenta diffusionskoefficienterna, $\partial u/\partial$ är konstanta hastighetsgradienter och t är tiden efter utsläppet. Strömning antages ske endast i x -riktningen.

Även Kullenberg [28] finner, att den horisontella omblandningen beror av den vertikala diffusionen i samband med vertikala hastighetsgradienter. I upp till 12 dagar finner Kullenberg, att variansen ökar proportionellt mot t^3 och därefter proportionellt mot t^2 .

Skjuvningens inverkan på spridningskoefficienten visas i figur 5.5. Figuren är till att börja med identisk med figur 5.4 och beskriver då diffusionskoefficientens ökning med tiden. Efter hand blir vertikala spridningen så stor, att den vertikala skjuvningen påverkar spridningen. Dispersionskoefficienten växer då som tiden i kvadrat.

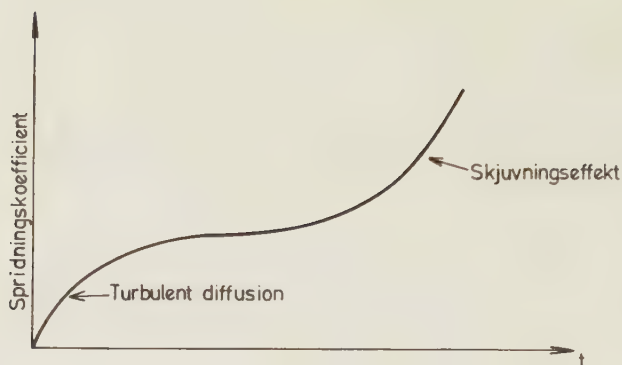


Fig. 5.5 Dispersionskoefficienten som funktion av tiden

5.2.7 Inverkan av densitetsskiktning

En stabil densitetsskiktning förhindrar vertikal omblandning och tjänstgör som en barriär mot transport av rörelsemängd, värme och massa. Enligt Phillips [1.4] kan den vertikala utbyteskoefficienten för rörelsemängd tecknas

$$v = A \cdot \underline{w}^{\prime 2} \cdot T_{Lz} \quad (5.31)$$

$$T_{Lz} = \int_0^{\infty} r(t) \cos Nt \cdot dt \quad (5.32)$$

$$N = \text{Brunt-Väisälä frekvensen} = \left(-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.33)$$

$$A = \text{konstant} \approx 3$$

Uttrycket är i princip ekvation (5.21), men tidskalan blir mindre, om vattenmassorna är stabila, dvs. om N är stort.

Kullenberg [27] har såväl teoretiskt som vid försök kommit fram till uttrycket

$$D_z = 8,9 \cdot 10^{-8} \frac{W^2}{N^2} \left| \frac{\partial |u|}{\partial z} \right| \quad (5.34)$$

för den vertikala diffusiviteten. W anger vindhastigheten och $|u|$ är den absoluta strömhastigheten. Ekvation (5.34) visar, att vid stark skiktning är den vertikala omblandningen liten.

Vid sina färgförsök i de stora sjöarna finner Csanady [13], att färgen sprider sig ner till språngskiktet men sedan endast mycket långsamt kan tränga genom detta. Hale [18] har fotograferat färgmoln under vattnet. Bilderna visar, att färgen inte kan tränga igenom språngskiktet utan breder ut sig kring detta. Silkers [34] mätningar i Stilla Havet visar, att i det homogena ytskiktet sker omblandningen snabbt. Redan termoklinens övre del tjänstgör emellertid som en diffusions-spärr.

5.2.8 Energifördelning

Vinden tillför strömmarna kinetisk energi. Genom Reynolds-spänningarnas arbete mot hastighetsgradienten överförs energi till de största turbulentare virvlarna. Energin överförs vidare från större till allt mindre virvlar för att slutligen dissipera till värme. Undantages de största virvlarna så lyder spektrats dynamiska ekvation vid isotrop turbulens

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = - \frac{\partial}{\partial k} \Sigma(k) - 2\nu k^2 E(k)/\rho \quad (5.35)$$

där k = vågtal

E = den tredimensionella energispektrumfunktionen

$\Sigma(k)$ = energitransporthastigheten från vågtal mindre till större än k .

Sista termen anger energidissipationshastigheten. Figur 5.6 enligt Phillips [1.4] visar de olika vågtalens energiinnehåll och deras energidissipation.

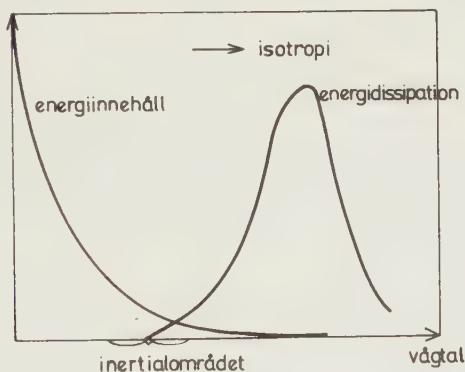


Fig. 5.6 Energiinnehåll och dissipation som funktion av vågtal.

Den totala energidissipationshastigheten, Σ_0 , är

$$\Sigma_0 = \rho^{-1} \int_0^{\infty} 2\nu k^2 E(k) dk \quad (5.36)$$

Eftersom det är energin i de allra minsta virvlarna, som dissiperar till värme, så gäller inom det område, i vilket såväl energiinnehåll som energidissipationen är liten, det s.k. inertialområdet,

$$\Sigma(k) = \text{konstant} = \Sigma_0$$

Det är inom detta område, som $4/3$ -lagen gäller. Dissipationshastigheten fås ur ekvation (5.24)

$$\Sigma_0 = \frac{u'^3}{l} \quad (5.37)$$

där l som tidigare är en turbulent längdskala.

Vid tillräckligt stora vågtal är turbulensen oberoende av hur den skapats och är därför isotrop. För mycket stora vågtal, i det universella jämviktsområdet, finns två bestämmande parametrar: kinematiska viskositeten och energidissipationshastigheten.

5.3 Resultat från litteraturen

5.3.1 Horisontella spridningsförsök

Horisontella spridningskoefficienter kan bestämmas genom färgförsök. Färgutsläpp sker i regel momentant i vattenytan. Från en båt, som åker fram och tillbaka över färgmolnet, tages koncentrationsprover. Man måste dock ha klart för sig vilken typ av spridning, som man studerar.

En annan metod är att studera spridningen av fasta flytande föremål, t.ex. flaskor eller papperslappar. Standardavvikelsen kan härvid lätt bestämmas. Fasta flytande föremål kan också användas för bestämning av separationen mellan två partiklar.

Stommel [36] använde sig av den sist nämnda metoden och fann därvid stöd för $4/3$ -lagen, ekvation (5.24). Som längdskala användes separationsavståndet.

En rad färgmätningar stöder $4/3$ -lagen. Från ett försök i Lake Ontario med 60 timmars varaktighet rapporterar Murthy [29] en längdskala inom intervallet 100 m - 10 km och en spridningskoefficient, som följde $4/3$ -lagen och låg i intervallet

$$E(\text{hor}) = 10^3 - 10^5 \text{ cm}^2/\text{s} \quad [\text{Lake Ontario, 60 tim}]$$

I en senare undersökning finner Murthy och Kenney [30] bättre anpassning till en " $6/5$ -lag". Som längdskala väljer de 3 • standardavvikelsen.

Även Kullenberg [28] har funnit, att helt i överensstämmelse med $4/3$ -lagen ökar variansen proportionellt mot tiden upphöjd till 3 för en tid upp till 12 dagar. Okubo [32] har sammanfattat alla för honom tillgängliga data om "separationsdiffusion" från fältexperiment i två slags diffusionsdiagram. Sambandet mellan varians och diffusionstid visas i fig. 5.7 och sambandet mellan skenbar diffusivitet och en längdskala i fig. 5.8. I ekvation (5.24) är $C_1 = 0,01$ och energidissipationshastigheten ungefär $0,0025 \text{ cm}^2/\text{s}^3$. Grant och Stewarts [35] noggranna undersökningar visar, att energidissipationshastigheten är cirka $0,001 - 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ och minskar med ökat djup.

Csanady [12,13,14] finner, att initieellt små och initieellt stora färgmoln uppträder olika. För de små molnen uppnås ett asymptotiskt diffusivitetvärde redan vid en molnstorlek av 40 meter. Virvlar större än 10 m inverkar inte. Den horisontella turbulensen befinnes vara anisotrop. Typiska värden för de relativa diffusionskoefficienterna är

$$D_{\text{rel(long)}} = 2000 \text{ cm}^2/\text{s} \quad D_{\text{rel(lat)}} = 400 \text{ cm}^2/\text{s} \quad [\text{stora sjöarna}]$$

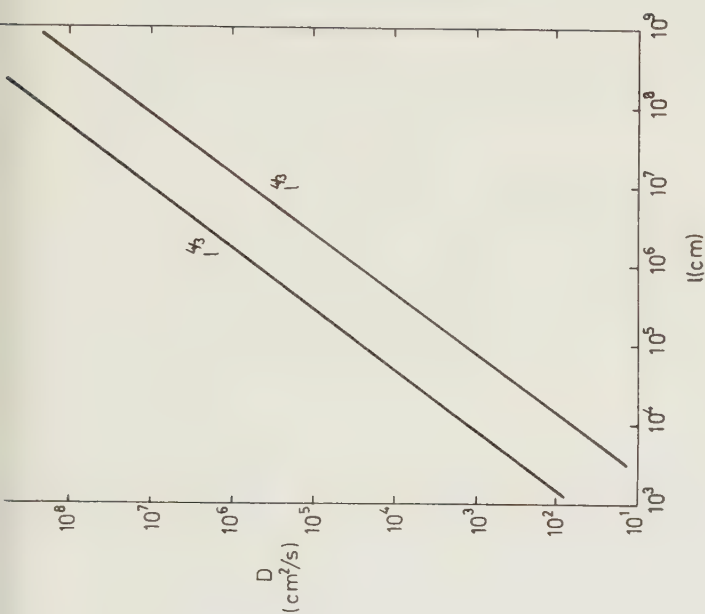


Fig. 5.8 Skenbara diffusiviteten som funktion av diffusionsskalan (Okubo). (uppmätta värden mellan linjerna)

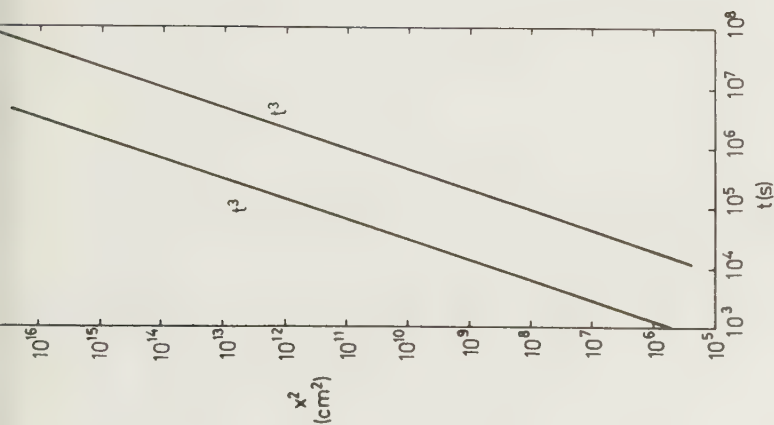


Fig. 5.7 Horisontella variansen som funktion av diffusionstiden (Okubo). (uppmätta värden mellan linjerna)

I initiiellt stora moln sker en spridning genom virvlar av flera hundra meters storlek, och spridningen följer $4/3$ -lagen. Den advektiva spridningen ger upphov till en ökad skenbar diffusion.

Asymptotiska relativa horisontella diffusivitetensvärden har från de stora sjöarna också redovisats av Noble [15], $244 \text{ cm}^2/\text{s}$, och Palmer [33], $65\text{--}130 \text{ cm}^2/\text{s}$.

5.3.2 Horisontella korrelationsstudier

Palmer och Izatt [33] har prövat att bestämma spridningen med fasta registrerande strömmätare, flyglar. Hastighetsvariationerna från en timme till en annan undersöktes varvid en Eulersk tidskala av 10 timmar erhöles. Lagranges längdskala förutsattes vara lika med Eulers, som erhöles ur ekvation (5.14) till omkring 100 m. Diffusiviteten beräknades sedan enligt

$$D = \underline{u}' \cdot L_L \quad (5.38)$$

varvid en horisontell diffusivitet av $10.000\text{--}100.000 \text{ cm}^2/\text{s}$ erhöles.

Engelund [16] och Hansen [19] har med hjälp av flytande plastbollar i laboratorium studerat hastighetsfluktuationer i ytan av ett kanalflöde. Engelund använde ett mättningsförfarande enligt Euler med tidsintervall 0,3 s, medan Hansen använde ett Lagrangeskt mättningsförfarande med tidsintervall 0,08 s. Som förhållande mellan Eulers och Lagranges längdskala har använts $\alpha = 2,5$. Den allmänna diffusionsekvationen med turbulenta utbyteskoefficienter befinnes vara användbar. Engelund föreslår följande spridningskoefficienter, vilka torde motsvara de absoluta diffusiviteterna i ytan vid kanalströmning.

$$D(\text{long}) = 0,045 \cdot h \cdot u_0$$

$$D(\text{lat}) = 0,22 \cdot h \cdot U_F$$

där h = vattendjupet, u_0 = ythastigheten och U_F = friktionshastigheten vid botten. Engelunds och Hansens mätningar sammanfattas i tabell 5.1.

Tabell 5.1 Resultat från stokastiska laboratoriestudier

referens	djup medelhast. cm cm/s		longitudinell			lateral riktning		
			$\underline{u}'$ cm/s	T_L s	D cm^2/s	v' cm/s	T_L s	D cm^2/s
Engelund	5,5	30	3,5	0,8	10	2,6	0,6	4
Engelund	17	30	1,5	12	25	1,1	6	6,5
Hansen	5	30	3,0	1,15	10	2,0	0,7	3

Bowden [6] har 60-125 cm över botten på 20 m:s djup i en kraftig tidvattenström med en elektromagnetisk flödesmätare mätt fluktuationerna över 10 min. intervall. Strömmen var $u = 50$ cm/s. Med som vanligt u och x i strömriktningen och v och y horisontellt vinkelrät mot denna fann han

$$\underline{u}' = 0,12 u ; \underline{v}' = 0,08 u ; r_{xy} = 0,14 ; L_{Ex} = 3,7 m ; L_{Ey} = 1,4 m$$

[tidvattenström, havsvik]

Några spridningskoefficienter redovisas inte, men ovan angivna data ger med $\alpha = 2,5$ de absoluta diffusivitetensvärdena

$$D(\text{long}) = 900 \text{ cm}^2/\text{s} \quad D(\text{lat}) = 220 \text{ cm}^2/\text{s} \quad [\text{tidvattenström, havsvik}]$$

5.3.3 Vertikala färgförsök

Csanady [12,13] har studerat den vertikala diffusionen genom att i ytan momentant släppa ut färg, vars vertikala utbredning han sedan följde. Han fann, att den vertikala utbredningen förhindrades, om vattenmassorna var skiktade. Även om vattenmassorna var homogena, avtog utbredningshastigheten några meter under ytan. För sjöarna Huron och Erie rapporterar Csanady

$$D_{\text{rel}}(\text{vert}) = 3 - 30 \text{ cm}^2/\text{s} \quad [\text{Stora sjöarna}]$$

Så låga värden som $0,8 \text{ cm}^2/\text{s}$ rapporteras vid närvaro av ett diffusions-"tak" på $1,5$ m djup.

Från Stilla Havet i termoklinens övre del visar Silkers [34] koncentrationsmätningar vertikala diffusivitetensvärden kring $0,5-0,7 \text{ cm}^2/\text{s}$. Klimök [26] har i oceaner uppskattat vertikala diffusiviteten till $5 \text{ cm}^2/\text{s}$. Utbyteskoefficienten för rörelsemängd bedöms emellertid vara mycket högre, $100 \text{ cm}^2/\text{s}$. Detta motsäges delvis av Jobson-Sayres [24] laboratorieundersökningar. För mycket fina sedimentpartiklar finner de utbyteskoefficienter, som stämmer överens med de för rörelsemängd. De finner ett uttryck för medelvärdet i en vertikal av den vertikala utbyteskoefficienten enligt

$$v(\text{vert}) = 0,1 \cdot h \cdot U_F \quad [\text{lab-kanal}]$$

med h och U_F enligt ekvation (5.29). Även Fukuda [17] finner, att medelvärdet av den vertikala utbyteskoefficienten ökar proportionellt mot vattendjupet, och att den är av storleksordningen $10 \text{ cm}^2/\text{s}$.

De av Kullenberg [27] redovisade vertikala diffusionskoefficienterna uppvisar ett tydligt vindberoende, ekvation (5.34). För i det närmaste densitetshomogena vattenmassor redovisas för de översta 30 metrarna i innanhav och fjordar:

Tabell 5.2 Vertikal diffusionskoefficient (Kullenberg)

D (cm ² /s):	35	60	5	0,1	0,13	1,5
W (m/s):	9	8	5	4	2	1
N ² (s ⁻²) · 10 ⁴ :	0,8	0,3	2,6	4,8	5,3	5,3

W är vindhastigheten och N en stabilitetsparameter enligt ekvation (5.33).

5.3.4 Vertikala korrelationsstudier

Den bästa bestämningen av vertikala virvelviskositeten kan fås genom att mäta Reynolds-spänningarna, ekvation (3.10), och hastighetsgradienten. Baines och Knapp [3] har i en sluten övertäckt laboratoriekanal simulerat vindinducerad strömning. De redovisar inga Reynolds-spänningar utan endast hastighetsfluktuationer och hastighetsprofiler. En virvelviskositet kan emellertid uppskattas ur dessa till

$$v(\text{vert}) = 4 \cdot 10^{-5} \cdot W \cdot h \quad [\text{fysisk modell}]$$

där W = vindhastigheten och h = vattendjupet. Dessa mätningar diskuteras noggrannare längre fram.

Direkta fältmätningar av vertikala hastighetsfluktuationer har utförts av Bowden [6] 50-175 cm över botten i en havsvik, se avsnitt 5.3.2.

Ur de angivna värdena

$$w' = 0,07 \text{ u} ; \quad r_{xz} = -0,38 ; \quad L_{Ez} = 1,3 \text{ m}$$

kan den vertikala absoluta diffusiviteten uppskattas till

$$D(\text{vert}) = 180 \text{ cm}^2/\text{s} \quad [\text{tidvattenström, havsvik}]$$

om $\alpha = 2,5$ användes. w betecknar som vanligt hastigheter i den vertikala riktningen, z.

5.4 Horisontella spridningskoefficienter ur färgförsök

5.4.1 Mätplatser

I sjöarna Vombsjön, Mien och Yddingen har horisontella spridningskoefficienter bestämts genom utsläpp av färg i vattenytan. Vombsjön är 15 m djup och har en area av 15 km². Sjön är så vindexponerad, att något språngskikt inte finns. Mien är något större än Vombsjön, 25 km². I sjön finns en ö och i anslutning till denna ett grund med stor utsträckning. Sjöns djup är 20-30 m. Vid den tid, då mätningarna utfördes, fanns ett mycket markerat språngskikt på omkring 10 m:s djup. Yddingen är betydligt mindre, 6 km², än de båda andra sjöarna och är dessutom mycket grund, 3-4 m. Sjön är mycket vindexponerad. Mätningarna i Vombsjön och Mien har utförts av civilingenjörerna B.G. Andersson och C.M. Anderberg.

Avsikten var, att varje mätserie i Vombsjön och Mien skulle bestå av 5 experiment. Detta kunde inte alltid genomföras, eftersom de yttre förhållandena hann ändra sig allt för mycket (serierna 4, 5 och 6 i Vombsjön). I vissa fall uppnåddes inget asymptotiskt värde på diffusiviteten. Ett värde fick således sällas bort ur vardera av serierna Vombsjön 1, 2 och 4 samt Mien 2. Asymptotvärdena nåddes i båda sjöarna inom 15 minuter. En försöksserie visas i figur 5.9. Det är tveksamt om det näst högsta värdet har nått sitt slutvärde.

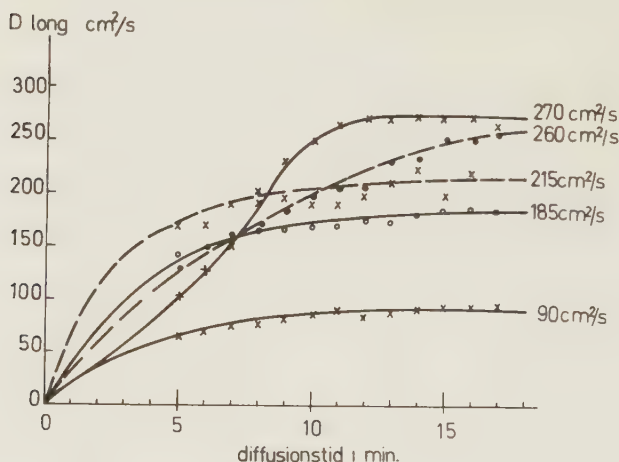


Fig. 5.9 Longitudinella spridningskoefficienter som funktion av diffusionstiden. Mien-serie nummer 1.

I Yddingen uppnåddes vid samtliga delförsök ett gränsvärde på diffusiviteten efter cirka 20 minuter. Diffusivitetens värdena är i Yddingen 600 cm^2/s och 60 cm^2/s i longitudinell respektive lateral riktning. Bortsett från en dag med svaga vindar synes vindstyrkan inte inverka på diffusiviteterna.

I Vombsjön och Mien är longitudinella diffusiviteten mellan 200-300 cm^2/s och oberoende av vindstyrkan. I lateral riktning ökar diffusiviteten något med ökad vind, 20-50 cm^2/s .

Det är svårt, att uttala sig om hur pass representativa dessa värden är för sjöar i allmänhet. Opulicerade mätningar utförda som examensarbete vid LTH av Anders Nilsson i Storsjön (area 2 km^2) i sydöstra Halland visar diffusivitetens värdena 200 cm^2/s och 40 cm^2/s i longitudinell respektive lateral riktning. Fil.kand. S.Modig (se Bengtsson [7]) har utfört spårämnesundersökningar i Velen. Ur den vanliga diffusionsekvationen i tvådimensionell form har han beräknat en horisontell diffusivitet av 70 cm^2/s och med diffusionsekvationen i tredimensionell form en horisontell diffusivitet av 430 cm^2/s . Diffusivitetens värdena tycks alltså i allmänhet vara 100-1000 cm^2/s i strömmens riktning och 10-100 cm^2/s vinkelrät mot strömmen.

5.5 Spridningssimulering

5.5.1 Stokastiska spridningsmodeller

Ju mera "omrörd", turbulent, en vattenmassa är desto snabbare sprids närbelägna partiklar från varandra. Hastighetsfluktuationernas storlek är ett mått på turbulensen. Turbulensen karakteriseras också av korrelationer mellan fluktuationer i olika riktningar, på visst avstånd och vid olika tidpunkter. Om fluktuationerna kan mätas över mycket korta tidsintervall, medger ekvation (5.21) en bestämning av diffusiviteten. När detta inte är möjligt, kan stokastiska modeller utnyttjas för att bestämma förväntad spridning, se Bengtsson och Eriksson [9].

För en helt slumpartad en-dimensionell spridning av vattenpartiklar blir en enskild vattenpartikels hastighet

$$u = \bar{u} + \mu \underline{u}' \quad (5.39)$$

där $\bar{u}$ = den i tiden konstanta medelströmmen, som i de följande ekvationerna inte kommer att redovisas. μ är ett slumpantal, som antages vara normalfördelat, $N(0,1)$, eftersom undersökningar redovisade i avsnitt 5.3 tyder på detta.

Om en korrelation, r , mellan närbelägna tidsintervall förekommer, så får en bestämd partikel (ev. indicerad med 1) hastigheten

$$u(t) = r(t') \cdot u'(t - t') + \mu \underline{u}'(1 - r^2(t'))^{\frac{1}{2}} \quad (5.40)$$

där t' = tidsintervallet och t = diffusionstid.

En viss partikels hastighet kan bero av en på ett visst avstånd, x' , belägen partikels hastighet. Avståndskorrelationsfunktionen betecknas $f(x')$. Hastighetsfluktuationerna kan för den första partikeln beskrivas med ekvation (5.40) och för den andra partikeln, index 2, med ekvation (5.41). Turbulensen förutsättes vara stationär och homogen.

$$u_2(t) = r(t') \cdot u'_2(t - t') + \underline{u}'(1 - r^2(t'))^{\frac{1}{2}} \left\{ \mu_1 f(x') + \mu_2 (1 - f(x')^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.41)$$

Nu är turbulent spridning minst ett två-dimensionellt problem, varför hänsyn måste tagas även till riktningskorrelationen, r_{ij} , eller korskorrelationen, mellan hastighetsfluktuationer i riktningarna i och j . Om riktningskorrelationen medtages i ekvation (5.40) erhålles i x -riktningen uttrycket nedan, om z - är den andra riktningen. Därvid har förutsatts, att $u'(t - t')$ och $w'(t)$ är okorrelerade.

$$u(t) = r(t') \cdot u'(t - t') + r_{xz} \frac{\underline{u}'}{\underline{w}'} w'(t) + \mu \underline{u}'(1 - r^2(t') - r_{xz}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.42)$$

Eftersom avståndsfunktionen beror av fluktuationernas riktning och dessutom är olika i longitudinell och transversell riktning, är det inte meningsfullt att kombinera ekvationerna (5.41) och (5.42).

5.5.2 Teoretiska simuleringar

Spridningsmodellerna kan utnyttjas på två sätt. Spridningen av enskilda partiklar kan studeras. Koordinaterna för en partikel bestäms för varje tidpunkt. Sådana steg-för-steg förfaranden för en mängd partiklar ger en koncentrationsfördelning i ett simulerat utsläpp. Genom att bestämma variansen för medelvärdet erhålles den absoluta diffusiviteten.

Ekvationerna (5.40-41) kan användas för bestämning av separationsavståndet mellan två partiklar, som har ett initieellt separationsavstånd $x'(0)$. Avståndet mellan partiklarna beräknas för varje tidssteg, och variansen, $(x' - x'(0))^2$, ger den relativa diffusiviteten.

I den mycket enkla modellen enligt ekvation (5.39) blir diffusiviteten en funktion enbart av hastighetsfluktuationernas storlek och indirekt av tidsintervallets längd. Diffusiviteten blir

$$D = \frac{1}{2} \cdot t' \cdot (\underline{u}')^2$$

Modellen ger för små diffusivitetvärden för att kunna beskriva den turbulenta spridningen i horisontell riktning i en sjö men kan eventuellt vara användbar i vertikal riktning.

Även i den tidskorrelerade modellen enligt ekvation (5.40) studeras varje riktning för sig. Diffusiviteten beror nu även av tidskorrelationen. Det asymptotiska diffusivitetvärdet samt tiden för att uppnå detta ökar, då tidskorrelationen ökar. Diffusivitetvärdet enligt ekvation (5.39) blir nu förstorat med en faktor, som är ungefär $(1+r)/(1-r)$. I denna kvot betecknar r Lagranges tidskorrelation.

För att en riktningskorrelerad modell enligt ekvation (5.42) skall skilja sig från en enbart tidskorrelerad modell, måste en tidskorrelation föreligga även i vertikal riktning. För ett ytutsläpp, som utan någon riktningskorrelation har diffusiviteten $90 \text{ cm}^2/\text{s}$, erhålles, om turbulensen är isotrop med hastighetsfluktuationerna $0,6 \text{ cm/s}$ över 1 minut och tidskorrelationen $0,8$,

$$D = 250 \text{ cm}^2/\text{s} \text{ (för } r_{xz} = -0,3) \text{ och } D = 540 \text{ cm}^2/\text{s} \text{ (för } r_{xz} = -0,5)$$

Eftersom de vertikala fluktuationerna knappast kan mätas, är denna modell inte praktiskt användbar. Ur modellen kan dock vissa slutsatser om den vertikala turbulensen dragas.

Med separationsmodellen enligt ekvationerna (5.40-41) kan en relativ diffusivitet bestämmas. Förutom med ökande fluktuationshastighet och ökande tidskorrelation så separerar två partiklar mera, om avståndskorrelationen är liten. Vid stor avståndskorrelation når diffusiviteten ett slutvärde endast, om tidskorrelationen är mindre än $0,8$. Om spridningen endast kan ske i en riktning, blir diffusiviteten mindre, än om spridningen kan ske i två riktningar, såvida inte längdskalan, L , ändras till $L^{\frac{1}{2}}$. Vid de teoretiska simuleringarna har en exponentiell avståndskorrelation med exponenten $-x'/L$ utnyttjats. x' betecknar här det absoluta avståndet mellan partiklarna. Ju större det initiella separationsavståndet är, desto snabbare sprids partiklarna från varandra i början av spridningsförloppet. Efter lång tid utjämnas emellertid det initiella separationsavståndets inverkan.

Resultat från några simuleringar framgår av tabell 5.4. I de tvådimensionella fallen är turbulensen isotrop. Separationshastigheten, P , har beräknats som dx'/dt . Endast då spridningen följer $4/3$ -lagen, är separationshastigheten konstant. Stor avståndskorrelation betyder, att spridningen mycket länge följer $4/3$ -lagen. I tabellen anger $t(P)$ den tid, under vilken separationshastigheten är konstant, och $t(S)$ den tid, efter vilken diffusiviteten antager sitt slutvärde.

Tabell 5.4 Relativ diffusivitet ur separationsmodellen

nr	t' min	$x'(0)$ m	L m	$\underline{u}'$ cm/s	r	dim	P cm/s	$D(100 \text{ min})$ cm ² /s	$D(200 \text{ min})$ cm ² /s	$t(P)$ t	$t(S)$ i m m a r
1	3	2	20	1,0	0,8	2	0,4	700	1400	2	4
2	3	2	100	1,0	0,8	2	0,14	80	200	>4	-
3	3	1	20	1,0	0,8	2	0,4	660	1400	2	4
4	2	1	3	0,8	0,8	2	0,25	980	1080	-	3
5	2	1	3	1,1	0,6	2	0,25	870	970	-	3
6	3	1	5	1,0	0,8	1	0,35	710	1040	>3	-

I samtliga spridningsmodeller är det lätt att bygga in ett olikformigt hastighetsfält. Därvid får man ett begrepp om skjuvningens inverkan på ett utspädningsförlopp. I figur 5.10 visas simulerade partikelutsläpp med respektive utan hastighetsgradient. Simuleringar visar, att den vertikala skjuvningens spridande effekt kan beskrivas med ekvation (5.30). Vid utsläpp i ytan blir emellertid koeficienten framför den vertikala diffusiviteten endast hälften så stor.

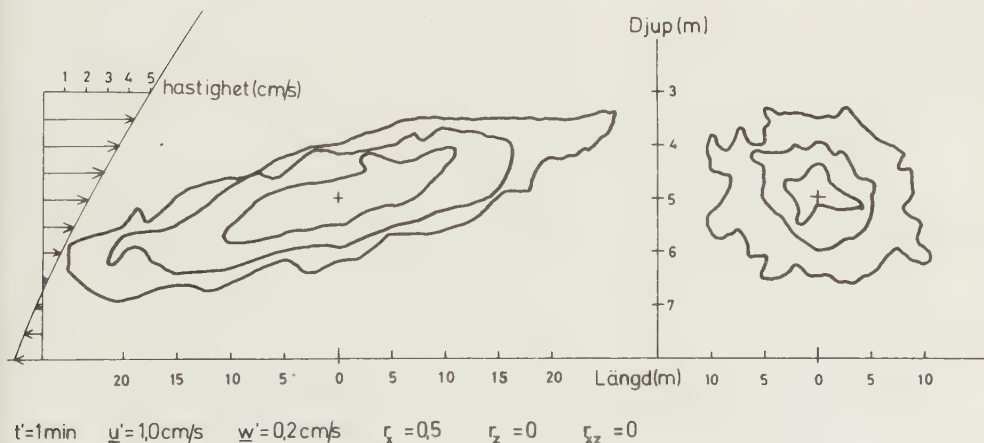


Fig. 5.10 Koncentrationsfördelning (90, 50, 20 % av maximivärdet) efter 30 minuter vid utsläpp med (till vänster) resp. utan hastighetsgradient.

5.5.3 Korrelationsstudier i Yddingen

Under sommaren 1972 mättes genom upprepade utsläpp av nästan helt vattenfyllda flaskor de horisontella hastighetsfluktuationerna integrerade över de cirka 20 översta cm i sjön Yddingen. Mätningarna utfördes som examensarbete av Roland Möller, Robert Nilsson och Bo Pettersson.

Mätningarna utfördes från en flöte med fri genomströmning. Fem meter långa bryggor placerades cirka 3 dm över vattenytan på upprättstående flytande tomfat. Flotten fixerades med fyra ankare, ett i varje hörn. Anordningen framgår av figur 5.11. Vanliga läskedrycksflaskor, vilka så när som på korken var helt nedsänkta under vattenytan, släpptes i punkten s och infångades på motsatta sidan av flotten. Flyttiden över en sträcka av 3,5 m samt infångningsläget antecknades. Vid utsläpp utanför flotten fick denna kompletteras enligt figuren. Flötenas förankringslinor spändes mycket hårt. Utsläpp och uppsamling fick nu ske från en båt.

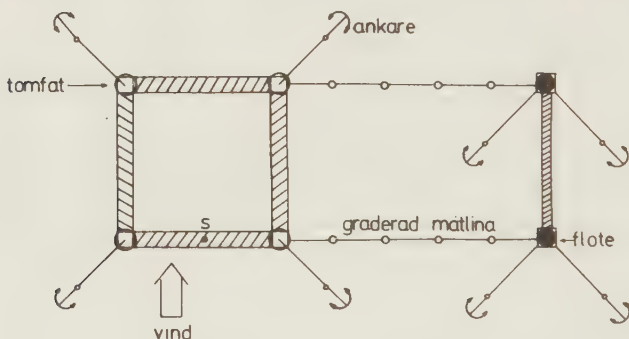


Fig. 5.11 Mätupställning vid korrelationsstudier

Flaskorna släpptes från punkten s i serier om minst 30 stycken med ett tidsintervall av 1 minut. Därvid kunde Eulers tidskorrelationsfunktion bestämmas. Vid bestämning av avståndskorrelationsfunktionen släpptes samtidigt flaskor med ett visst transversellt avstånd, varvid det extrapolerade koordinatsystemet enligt figur 5.11 utnyttjades. Utsläpp inne i flotten för bestämning av fluktuationernas storlek och av tidskorrelationen gjordes i 23 serier. Avståndskorrelationen bestämdes för 8 serier, för vilka avståndet mellan flaskorna fick variera från 0,25 m till 10 m.

För alla de 23 serierna har en tidskorrelationsfunktion uppritats såväl i vindriktningen som vinkelrät denna. Ytan under kurvorna ger tidsskalorna, som visar sig vara oberoende av vindstyrkan i longitudinell riktning men minska med ökad vindstyrka i den laterala riktningen. Tidsskalorna är cirka

$$T_E = 1-2 \text{ min}$$

Ekvation (5.21) möjliggör en bestämning av diffusiviteten, om tidskalan kan omräknas till Lagranges form. Omräkningsfaktorn beräknas en-

ligt ekvation (5.16) med $\alpha = 2,5$. I den transversella riktningen finns ingen medelström, varför Lagranges tidskala har antagits vara lika med Eulers. Mättningsresultat samt på ovannämnda sätt beräknade absoluta diffusiviteter visas i tabell 5.5.

Tabell 5.5 Resultat från korrelationsstudier i Yddingen

ser. nr	Datum 1972	Vind m/s	u cm/s	u' cm/s	v' cm/s	$T_E(\text{long})$ s	$T_E(\text{lat})$ s	D(long) cm ² /s	D(lat) cm ² /s
1	20/7	0,9	3,9	0,29	0,32	55	206	30	20
2	27/6	1,8	6,2	0,96	0,95	426	426	1100	390
3	27/6	1,9	6,6	0,40	0,58	10	311	10	100
4	18/7	2,2	3,6	0,99	0,31	57	170	90	40
5	20/7	2,4	6,5	0,79	0,57	17	139	40	45
6	19/7	2,5	4,6	0,38	0,68	129	238	100	100
7	18/7	2,8	3,4	0,66	0,50	170	170	170	40
8	19/7	2,9	4,7	0,59	0,55	90	373	110	110
9	19/7	2,9	5,9	0,52	0,04	80	202	110	0
10	14/6	3,0	4,4	0,53	0,76	53	98	60	55
11	14/6	3,3	6,2	1,23	0,72	334	82	1100	45
12	20/6	3,5	2,7	0,40	0,49	146	181	70	45
13	22/6	4,0	1,8	0,40	0,22	73	73	20	5
14	20/6	4,2	2,5	0,56	0,47	72	140	50	30
15	20/6	4,2	2,6	0,47	0,38	64	44	40	5
16	26/6	4,4	4,5	0,82	0,38	375	71	150	10
17	9/6	4,4	5,1	0,93	0,52	74	41	620	10
18	9/6	4,4	4,4	0,71	0,51	77	77	110	20
19	21/6	4,7	2,5	0,53	0,39	68	15	40	5
20	21/6	4,8	3,0	0,61	0,41	100	39	80	5
21	26/6	5,1	5,6	0,55	0,46	45	100	60	20
22	26/6	5,1	3,9	0,80	0,60	176	83	240	30
23	20/6	5,2	3,8	0,66	0,45	26	26	30	5
Medianvärden			-	0,59	0,49	74	139	100	30

Ingen som helst korrelation kunde påvisas mellan fluktuationer i de båda horisontella riktningarna.

Avståndskorrelationen befanns vara oberoende av vindstyrkan. Den för hastighetsfluktuationerna i strömriktningen beräknade Eulerska transversella avståndsfunctjonen visas i figur 5.12. Ytan under kurvan ger en transversell längdskala.

$$L_{Ey} = 1 \text{ m}$$

Den streckade kurvan är en exponentiell funktion med exponenten $-y/L$ och den heldragna är den uppskattade avståndsfunctjonen.

Även de tidigare omtalade mätningarna av Anders Nilsson visar för hastighetsfluktuationer över 1 minut en tidskala enligt Euler på 1 minut och en längdskala på 1 m. Dessa värden tycks alltså vara ganska typiska för turbulensens skala i sjöar.

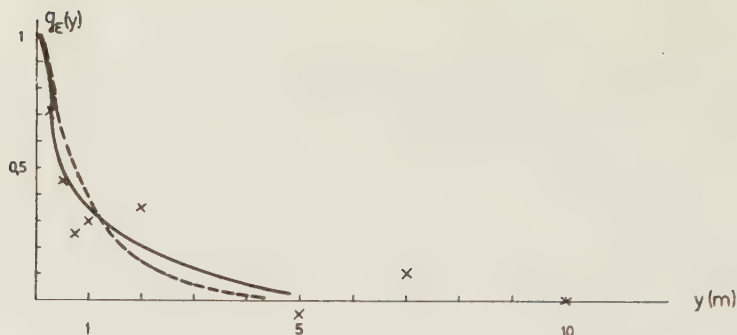


Fig. 5.12 Transversella avståndsfunktionen för fluktuationer i strömriktningen (Yddingen)

5.5.4 Spridningssimuleringar i Yddingen

Färgutsläpp i Yddingen har simulerats med en modell enligt ekvation (5.40). Tidskorrelationen i ett medföljande koordinatsystem måste därvid bestämmas. Korrelationsfunktionens tidskala nedminskas därför enligt figur 5.3, vilket medför, att tidskorrelationen för ett visst tidssteg ökar. Eftersom det i lateral riktning inte finns någon medelström, sättes i denna riktning r (Euler) = r (Lagrange). De för de 23 serierna beräknade absoluta diffusiviteterna, vilka redovisas i tabell 5.6 nedan, när sina slutvärden efter 1-2 timmar.

Tabell 5.6 Resultat från spridningssimuleringar i Yddingen

ser. nr	t' s	β	t'/β s	$r_x(t')$	$r_y(t')$	$r_x(t')/\beta$	D(long) cm ² /s	D(lat) cm ² /s
1	90	6,0	15	0,2	0,65	0,90	120	45
2	60	2,9	20	0,83	0,93	0,95	900	630
3	54	7,4	7	0,05	0,75	0,90	90	70
4	100	1,6	60	0,10	0,50	0,20	75	15
5	54	3,7	15	0,10	0,60	0,60	70	35
6	75	5,3	14	0,25	0,75	0,80	50	120
7	100	2,3	43	0,45	0,45	0,60	90	40
8	75	3,5	21	0,40	0,70	0,80	120	60
9	60	5,1	12	0,45	0,70	0,92	180	35
10	80	3,7	22	0,20	0,45	0,90	180	60
11	60	2,2	27	0,82	0,45	0,92	1000	40
12	130	3,0	43	0,40	0,40	0,60	45	35
13	200	2,0	100	0,03	0,00	0,18	20	5
14	140	2,0	70	0,25	0,38	0,58	60	30
15	135	2,5	55	0,05	0,15	0,18	25	10
16	80	2,4	33	0,30	0,10	0,65	40	0
17	70	2,4	29	0,80	0,25	0,90	600	15
18	80	2,7	30	0,25	0,25	0,75	140	10
19	140	2,1	65	0,07	-0,15	0,35	40	10
20	120	2,2	55	0,25	-0,10	0,45	55	10
21	60	4,5	13	0,15	0,00	0,80	80	5
22	90	2,2	40	0,60	0,30	0,80	260	30
23	90	2,5	36	0,30	0,15	0,80	180	10
Medianvärden				0,25	0,40	0,80	90	30

Värdena från serie 8, då turbulensen var i det närmaste horisontellt isotrop, har utnyttjats för spridningssimulering enligt ekvationerna (5.40-41). Avståndsskalan i figur 5.12 har fördubblats, eftersom längdskalan i longitudinell riktning är ungefär dubbelt så stor som den transversella längdskalan, varefter avståndskorrelationen mellan två partiklar har bestämts med den beräknade avståndsfunktionen. Det initiala separationsavståndet har antagits vara 1 m. En relativ horisontell diffusivitet erhålles

$$D(\text{hor}) = 250 \text{ cm}^2/\text{s}$$

vilken är ungefär dubbelt så stor som den absoluta diffusivitet, som den första modellen gav. Separationshastigheten och diffusiviteten som funktion av tiden visas i figur 5.13.

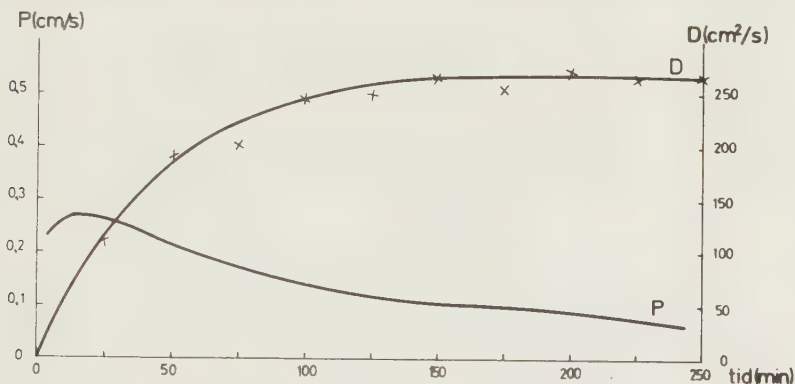


Fig. 5.13 Spridningskaraktistikors ändring med tiden

Halva diffusivitetsvärdet från färgförsöken ($1/2 D \approx 300 \text{ cm}^2/\text{s}$) skall jämföras med diffusivitetsvärdena i tabell 5.6 ($D = 90 \text{ cm}^2/\text{s}$). En anledning till att flaskorna sprids mindre än färgen kan vara, att fluktuationerna blir mindre, när de integreras över cirka 20 cm. I lateral riktning är emellertid överensstämmelsen god ($1/2 D = 30 \text{ cm}^2/\text{s} = D$). Skillnaden torde i stället bero på, att färgen påverkas av den vertikala diffusionen. Förutsättes korrelation mellan vertikala och longitudinella hastighetsfluktuationer vara -0,5, och de vertikala fluktuationerna vara 0,3 cm/s, med en tidskorrelation av 0,6, så ökar den longitudinella absoluta diffusiviteten till just $300 \text{ cm}^2/\text{s}$. De vertikala fluktuationerna har beräknats genom att antaga, att vindens skjuvande kraft är $0,10 \text{ dyn/cm}^2$, och att den vertikala diffusiviteten är $7 \text{ cm}^2/\text{s}$. Detta sista värde kan också ses som en bestämning av den vertikala diffusiviteten i Yddingen.

Det torde vara möjligt att studera utspädningsförlopp med stokastiska modeller. Om hastighetsgradienter finns torde modellerna vara speciellt användbara.

5.6 Vertikal utbyteskoefficienter

5.6.1 Färgförsök

Färg av samma densitet som det homogena vattnets injicerades genom punktering av en plastpåse 1,5 m under ytan. Tiden, som färgmolnet behövde för att nå ytan bestämdes. Förfarandet upprepades inom varje serie 10 gånger. De vertikala strömmarna antogs vara mycket små. Det vertikala avståndet från utsläppspunkten till ytan antogs vara två standardavvikelser av en partikels läge. Diffusiviteten kan bestämmas enligt ekvation (5.20), om den turbulenta tidskalan är så liten, att diffusionskoefficienten kan betraktas som konstant. I tabell 5.7 redovisas de beräknade relativa diffusiviteter. Standardavvikelsen för ett enskilt värde var för samtliga serier omkring 10% av medelvärdet.

Tabell 5.7 Relativ vertikal diffusivitet från färgförsök

Vombsjön		Mien	
Vind (m/s)	D (cm ² /s)	Vind (m/s)	D (cm ² /s)
3	17	3	14
5	19	4,5	13
7	26		

5.6.2 Strömmättningsförsök

Med strömkors har hastighetsfält och hastighetsgradienter kunnat bestämmas. Från vindprofiler, vilka uppmätts med vindmätare, har vindkraften på vattenytan kunnat bestämmas. Med känd hastighetsgradient i ytan ger Newtons viskositetslag direkt ett värde på virvelviskositeten $\nu(a)$. Om hela hastighetsfältet i en sjö eller masstransporten i en vertikal är känd, så kan den med den matematiska modellen i kapitel 6.1.2 beräknade strömningen jämföras med den verkliga. Den bästa anpassningen ger en uppskattning av virvelviskositeten $\nu(b)$. Den uppskattade virvelviskositeten i några sjöar visas i tabell 5.8. I Vombsjön samt i sista försöket i Velen fanns inget sprängskikt. Termoklinen var vid de övriga försöken i Velen belägen på 6-10 m djup och i Mien på 10 m djup. För Velen har vindkraften endast bestämts med $C_D = 0,0011$.

Tabell 5.8 Vertikal virvelviskositet från strömmätningar

Vombsjön			Mien			Velen		
Vind m/s	$\nu(a)$ cm ² /s	$\nu(b)$ cm ² /s	Vind m/s	$\nu(a)$ cm ² /s	$\nu(b)$ cm ² /s	Vind m/s	$\nu(a)$ cm ² /s	$\nu(b)$ cm ² /s
3	1,5	13	3	12	1	1	2	2
3,5	2,2	14	3	6	24	1	-	3
5	6,5	11	4,5	10	3	2	3	5
5	6,5	14	5,5	14	30	2	-	5
7	16	16				5	18	15
8	19	32						
8	17	72						

I fig. 5.14 visas diffusiviteten och virvelviskositeten som funktion av vindhastigheten. Cirklar motsvarar absoluta diffusiviteten, som är halva värdet av den relativa diffusiviteten. Diffusiviteten och virvelviskositeten tycks vara ungefär lika. Det finns ett tydligt och i det närmaste linjärt samband mellan utbyteskoefficient och vindhastighet. Detta styrks av laboratorieförsök [3,24]. Värdena är ungefär enhetliga för de tre sjöarna.

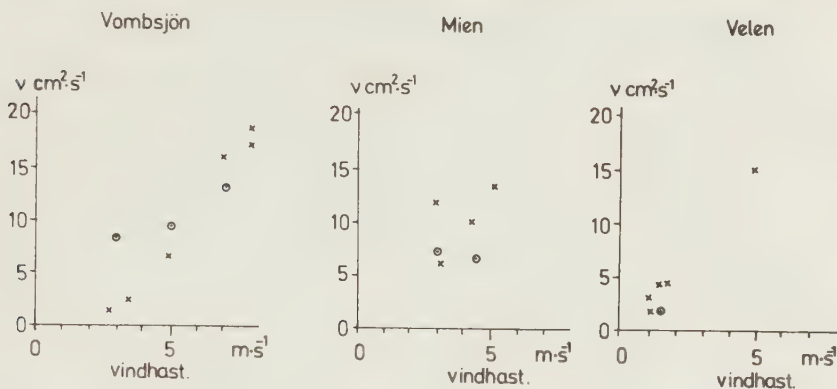


Fig. 5.14 Vertikala utbyteskoefficienten som funktion av vindhastigheten

Den vertikala utbyteskoefficientens värde, fördelning och inflytande på strömningen diskuteras närmare i kapitel 6 och 7.

5.6.3 Skenbar temperaturdiffusivitet

I Velen har temperaturen med 10 min. intervall i fyra vertikaler registrerats på varje meters nivå. En temperaturdiffusivitet kan bestämmas från ändringen av ett visst skikts värmeinnehåll. Värmetransporten förutsättes vara betingad enbart av temperaturgradienten, varför många obekanta mekanismer som konvektion och strålning implicit innefattas i utbyteskoefficienten. Värmeutbytet mellan vattnet och sedimenten är mycket litet och kan försummas. Ur ändringen av olika skikts värmeinnehåll kan därför värmetransporten beräknas från botten mot ytan, och med $c = \text{spec. värmet}$ för vatten kan temperaturdiffusiviteten beräknas ur

$$\text{transporterad värme per tids- och ytenhet} = \rho c k_z \partial T / \partial z \quad (5.43)$$

Det övre skiktet i sjön påverkas så mycket av de atmosfäriska förhållandena, att något pålitligt diffusivitetsvärde för epilimnion inte kan beräknas. För de djupare delarna av sjön är den beräknade diffusiviteten av storleksordningen $0,1 \text{ cm}^2/\text{s}$, men då har beräkningarna utsträckt över såväl nätter som dagar. Vid oskiktade vattenmassor är värdet på 10 m:s nivå betydligt högre än, då vattenmassorna är skiktade.

$$k_z = 1,6 \text{ cm}^2/\text{s} \text{ (maj -70, oskiktat);}$$

$$k_z = 0,05 \text{ cm}^2/\text{s} \text{ (aug/sept -70, skiktat)} \quad (\text{från IHD:s sjögrupp})$$

Från en enda dag, 25/5 1970, under vilken inga inre svängningar ägde rum, har ur ändringen av värmeinnehåll mellan kl. 9 och kl. 15 för epilimnion, termoklinen och hypolimnion temperaturdiffusiviteterna beräknats till

$$k_z(\text{epi}) = 11 \text{ cm}^2/\text{s} ; \quad k_z(\text{termo}) = 0,3 \text{ cm}^2/\text{s} ;$$

$$k_z(\text{hypo}) = 0,7 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Litteratur

1. Abraham, G., Holley, E.R. och Siemons, J. [1972]. Some aspects of analyzing transverse diffusion in rivers. - Delft Hydraulic Lab. pub. 102.
2. Arons, A.B. och Stommel, H. [1967]. On the abyssal circulation of the World Ocean III. - Deep-Sea Res. 14, p. 441-457.
3. Baines, W.D. och Knapp, D.J. [1965]. Wind driven water currents. - J. Hydraulic Div, ASCE 91 (2), p. 205-221.
4. Bansal, M.K. [1971]. Dispersion in natural streams. - J. Hydraulic Div, ASCE 97 (11), p. 1867-1886.
5. Batchelor, G.K. [1952]. Diffusion in a field of homogenous turbulence. - Proc. Camb. Phil. Soc. 48, p. 345-362.
6. Bowden, K.F. [1962]. Measurements of turbulence near the sea bed in a tidal current. - J. Geoph. Res. 67 (8), p. 3183-3186.
7. Bengtsson, L. [1973]. Spridningsstudier - Dynamiska studier i Velen. - Int. Hydr. Decade, Sweden, report 29 (7), p. 68-76.
8. Bengtsson, L. [1973]. Conclusions about turbulent exchange coefficients. - Proc. Int. Symp. on the Hydrology of Lakes, Otaniemi, Finland.
9. Bengtsson, L. och Eriksson, E. [1973]. Mixing characteristics.- Lake Velen project (9), Int. Hydr. Decade, Sweden.
10. Carter, H.H. och Okubo, A. [1965]. A study of the physical processes of movement and dispersion in the Cape Kennedy area. - The U.S. Atomic Energy Commission Report No. Nyo-2973-1, The Johns Hopkins University.
11. Crickmore, M.J. [1972]. Tracer tests of eddy diffusion in field and model. - J. Hydraulic Div, ASCE 98 (10), p. 1737-1752.
12. Csanady, G.T. [1963]. Turbulent diffusion in Lake Huron. - J. Fluid Mech. 17, p. 360-384.
13. Csanady, G.T. [1964]. Turbulence and diffusion in the Great Lakes. - Proc. 7:th Conf. Great Lakes Res., p. 326-339.
14. Csanady, G.T. [1971]. Turbulent diffusion in the Great Lakes. Some fundamental aspects. - 1st Int. Symp. on Stochastic Hydraulics, edited by Chao-Lin Chiu, p. 169-191.
15. Elder, J.W. [1959]. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. - J. Fluid Mech. 5 (5), p. 544-560.
16. Engelund, F. [1969]. Dispersion of floating particles in uniform channel flow. - J. Hydraulic Div, ASCE Vol 95 (4), p. 1149-1162.
17. Fukuda, M. [1972]. The change of diffusivity with measuring position. - Symp. on The physical processes responsible for the dispersal of pollutants in the sea with special reference to the nearshore zone - Denmark, paper 32.
18. Hale, A.M. [1970]. Dye injection in the vicinity of the thermocline. - Proc. 13th Conf. Great Lakes Res., p. 413-418.
19. Hansen, E. [1972]. Lagrangian characteristics of surface turbulence. J. Hydraulic Div, ASCE 98 (7), p. 1255-1263.

20. Harleman, D.R.F. [1966]. Diffusion processes in stratified flow.- Estuary and coastline hydrodynamics, edited by A.T. Ippen.
21. Higuchi, H. [1972]. Experimental study on the horizontal diffusion. - Symp. on The physical processes responsible for the dispersal of pollutants in the sea with special reference to the nearshore zone - Denmark, paper 29.
22. Holley, E.R. [1969]. Unified view of diffusion and dispersion. - J. Hydraulic Div, ASCE 95 (2), p. 621-631.
23. Höglström, U. [1964]. An experimental study on atmospheric diffusion. - Tellus 16 (2), p. 205-251.
24. Jobson, H.E. och Sayre, W.W. [1970]. Vertical transfer in open channel flow. - J. Hydraulic Div, ASCE 96 (3), p. 703-724.
25. Joseph, J. och Sendner, H. [1954]. Ueber die horizontale diffusion im meere. - Deutsche Hydrograph. Z. 11 (2), p. 49-77.
26. Klimok, V.I., Kochergin, V.P. och Sarkysian, A.S. [1972]. A theoretical model and density field calculation in the ocean with arbitrary bottom relief. - Int. Symp. on stratified flows - Novosibirsk.
27. Kullenberg, G. [1971]. Vertical diffusion in shallow waters. - Tellus 23 (2), p. 129-135.
28. Kullenberg, G. [1972]. Investigations on the dispersion in stratified vertical shear flow. - Symp. on The physical processes responsible for the dispersal of pollutants in the sea with special reference to the nearshore zone - Denmark, paper 35.
29. Murthy, C.R. [1970]. An experimental study of horizontal diffusion in Lake Ontario. - Proc. 13:th Conf. Great Lakes Res., p. 477-489.
30. Murthy, C.R. och Kenney, B.C. [1972]. Diffusion in coastal currents of a lake. - Symp. on The physical processes responsible for the dispersal of pollutants in the sea with special reference to the nearshore zone - Denmark, paper 40.
31. Noble, V.E. [1961]. Measurements of horizontal diffusion in the Great Lakes. - Proc. 4:th Conf. Great Lakes Res., p. 85-95.
32. Okubo, A. [1972]. Some speculations on oceanic diffusion diagrams. - Symp. on The physical processes responsible for the dispersal of pollutants in the sea with special reference to the nearshore zone - Denmark, paper 3.
33. Palmer, M.D. och Izatt, J.B. [1970]. Dispersion prediction from current meters. - J. Hydraulic Div, ASCE 96 (8), p. 1667-1680.
34. Silker, W.B. [1972]. Horizontal and vertical distributions of radionuclides in the North Pacific Ocean. - J. Geoph. Res. 77 (6), p. 1061-1070.
35. Stewart, R.W. och Grant, H.L. [1962]. Determination of the rate of dissipation of turbulent energy near the sea surface in the presence of waves. - J. Geoph. Res. 67 (8), p. 3177-3180.
36. Stommel, H. [1949]. Horizontal diffusion due to oceanic turbulence. - J. Marine Res. 8 (3), p. 199-225.

Kapitel 6. STATIONÄR BAROTROPISK STRÖMNING

6.1 Teoretiska modeller

- .1 Utan hänsyn tagen till jordrotation
- .2 Med hänsyn tagen till jordrotation
- .3 Med horisontell turbulens

6.2 Olika faktorerers värde och inverkan

- .1 Jordrotationen
- .2 Vertikal virvelviskositetens inverkan
- .3 Vertikal virvelviskositetens värde
- .4 Virvelviskositetens horisontella fördelning
- .5 Virvelviskositetens vertikal fördelning
- .6 Horisontell turbulens

6.3 Modell applicerad på Velen

- .1 Jämförelse mellan beräknade och mätta strömmar
- .2 Teoretisk beräkning av strömsituationer

6.4 Genomströmning förorsakad av in- och utflöde

Litteratur

Sammanfattning

Modeller för barotropisk strömning i en sjö, vilka tar hänsyn till vattenytans lutning, jordens rotation, vertikal och horisontell turbulens samt naturligtvis bottenkonfigurationen och vindstyrkan, presenteras. Den vertikala virvelviskositeten synes ha en i djupvertikalen parabolisk fördelning men trots allt vara ganska jämnt fördelad över sjöns hela vattenmassa och ha ett medelvärde, som är proportionellt mot vindstyrkan. Den horisontella turbulensen verkar utjämnande på strömningen och förhindrar lokalt kraftiga strömmar. En av modellerna har applicerats på sjön Velen. De beräknade strömmarna stämde väl med de uppmätta. Genom att ändra randvillkoren kan hänsyn tagas till genomströmningen.

- Figurer 6.1 Strömhastigheter på djupen 0; 0,1; 0,2 ... ggr. djupet 5 m med och utan (till höger) hänsyn till jordens rotation. Ythastighet 10 cm/s, virvelviskositet $2 \text{ cm}^2/\text{s}$, sjöarea 50 km^2 .
Stream velocities at the depths 0; 0,1; 0,2 ... times the depth 5 m with and without (to the right) the influence of the earth's rotation. Surface velocity 10 cm/s, eddy viscosity $2 \text{ cm}^2/\text{s}$, area of the lake 50 km^2 .
- .2 Strömmarna påverkas mera av jordrotationen vid ökat djup och vid minskad virvelviskositet.
The influence of the earth's rotation increases with increasing depth and decreasing eddy viscosity.
- .3 Hastighetsprofil för virvelviskositeten $20 \text{ cm}^2/\text{s}$ (- -) and $5 \text{ cm}^2/\text{s}$. Vindstyrka 7 m/s. Djup 10 m.
Velocity profile when the eddy viscosity is $20 \text{ cm}^2/\text{s}$ (- -) and $5 \text{ cm}^2/\text{s}$. Wind speed 7 m/s. Depth 10 m.
- .4 Strömmarna känner av botten i Velen, om virvelviskositeten är $25 \text{ cm}^2/\text{s}$. Strömhastigheter 1 cm/s.
The currents feel the bottom of Lake Velen, if the eddy viscosity is $25 \text{ cm}^2/\text{s}$. Stream velocities in cm/s.
- .5 Hastighetsprofil för virvelviskositeten linjärt avtagande från $10 \text{ cm}^2/\text{s}$ vid ytan till 0 vid botten samt för konstant virvelviskositet $10 \text{ cm}^2/\text{s}$ (- -).
Velocity profile when the eddy viscosity decreases linearly from $10 \text{ cm}^2/\text{s}$ at the surface to 0 at the bottom and when the eddy viscosity is constant (- -).
- .6 Virvelviskositetsfördelningen till vänster ger hastighetsprofilen till höger.
The distribution of the eddy viscosity to the left gives the velocity profile to the right.
- .7 Hastighetsprofilen till vänster erhålles med virvelviskositetsfördelningen till höger.
The velocity profile to the left is obtained with the distribution of the eddy viscosity to the right.
- .8 Av Baines och Knapp i laboratorium uppmätt hastighetsprofil.
Velocity profile measured in a laboratory flume by Baines and Knapp.
- .9 Strömning i sjön Velen (oktober 1970).
Circulation in Lake Velen (October 1970).
- .10 Jämförelse mellan mätta och beräknade strömmar i Velen.
Measured stream velocities compared to calculated ones in Lake Velen.
- .11 Teoretiskt beräknade strömmar på 2 m djup i Velen vid sydlig vind. Strömhastigheter angivna i cm/s. g = grund.
Calculated stream velocities at the depth of 2 m in Lake Velen for a southern wind. Stream velocities given in cm/s. g = shallow area.
- .12 Teoretiskt beräknade strömmar på 2 m djup i Velen vid västlig vind.
Calculated stream velocities at the depth of 2 m in Lake Velen for a westerly wind.
- .13 Randvärden vid genomströmning.
Boundary values when in- and outflow exist.

- Tabeller 6.1 Strömhastigheter för olika virvelviskositetsvärden
Stream velocities for different values of the eddy viscosity
- .2 Strömhastigheter för olika friktionskoefficienter
Stream velocities for different friction coefficients

Ekvationer 6.1-10Speciella beteckningar

a, b, c, T, A, B, C, D återkommer upprepade gånger som koefficienter.

c = virvelviskositetskoefficient

$k = (f/2v)^{\frac{1}{2}}$ i modell enligt avsnitt 6.1.2

$\alpha = (k/v)^{\frac{1}{2}}$ i modell enligt avsnitt 6.1.3

6.1 Teoretiska modeller

6.1.1 Utan hänsyn tagen till jordrotation

Vid stationär strömning är de viktigaste strömbidragande faktorerna vattenytans lutning och den vertikala turbulensen. Rörelseekvationerna enligt ekv. (3.14-15) förenklas, om hänsyn endast tas till dessa båda faktorer, för båda riktningarna till

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6.1)$$

Vid barotropiska förhållanden är tryckgradienten konstant ner genom en djupvertikal. Randvillkoren är enligt avsnitt 3.3.4 känd skjuvkraft i vattenytan ($z = 0$) och försvinnande hastighet vid botten ($z = -h$). Kontinuitetsekvationen ger den integrerade hastigheten eller volymtransporten, som måste vara lika med noll, om en smal slutan kanal betraktas. Om virvelviskositeten är konstant, får hastighetsfördelningen samma utseende som för laminär strömning

$$u(z) = \frac{\tau}{4\nu h} (3z^2 + 4zh + h^2) \quad (6.2)$$

Om en hel sjö studeras uppfylles kontinuitetsvillkoret med hjälp av strömfunktioner (ekv. 3.23). Med konstant virvelviskositet får strömhastigheterna i båda de horisontella riktningarna lösningen

$$u(z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\nu} \{z^2 - h^2\} + \frac{\tau}{\rho \nu} (z + h) \quad (6.3)$$

Integrering över hela djupet ger analogt med ekvation (3.20) mass-transportekvationer. Ur dessa kan, sedan strömfunktionen införts, tryckgradienterna bestämmas.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -a \frac{\partial \psi}{\partial y} + b \tau_x \cdot \frac{1}{\rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= a \frac{\partial \psi}{\partial x} + b \tau_y \cdot \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (6.4)$$

med $a = 3 \nu / h^3$; $b = 1,5/h$

På samma sätt som för ekvation (3.24) kan en differentialekvation erhållas, genom att trycktermerna via derivering och subtrahering elimineras.

$$\nabla^2 \psi + a \frac{\partial \psi}{\partial x} + b \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \cdot T = 0 \quad (6.5)$$

där $a = c \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$; $b = c \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$; $c = -3/h$

$$T = h^2/2\nu \cdot \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) + h/2\nu \cdot \left(\tau_y \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

6.1.2 Med hänsyn tagen till jordrotation

Vid cirkulation av stora vattenmassor inverkar jordens rotation på strömningen. I ekvationerna (3.14-15) måste då förutom termerna i ekvation (6.1) även termerna $-fv$ och fu medtagas. Med konstant virvelviskositet kan strömhastigheterna bestämmas till

$$\begin{aligned} u(z) &= -g_1(z) \frac{1}{f} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_2(z) \frac{1}{f} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} g_5(z) \tau_x + \frac{1}{\rho} g_6(z) \tau_y \\ v(z) &= g_2(z) \frac{1}{f} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_1(z) \frac{1}{f} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} g_6(z) \tau_x + \frac{1}{\rho} g_5(z) \tau_y \end{aligned} \quad (6.6)$$

där g -funktionerna beror av virvelviskositeten och djupet. Beteckningarna nedan gäller endast i detta sammanhang.

$$\kappa = \sqrt{f/2\Delta}$$

h = djupet i punkten

$$s = 2 \sin kh \cdot \sinh kh / (\cosh 2 kh + \cos 2 kh)$$

$$c = 2 \cos kh \cdot \cosh kh / (\cosh 2 kh + \cos 2 kh)$$

$$p = (\sin 2\kappa h + \cos 2\kappa h + \exp(-2\kappa h)) / 2\kappa v / (\cosh 2\kappa h + \cos 2\kappa h)$$

$$m = (\sin 2\kappa h - \cos 2\kappa h - \exp(-2\kappa h)) / 2\kappa v / (\cosh 2\kappa h + \cos 2\kappa h)$$

$$s(z) = \sin kz \sinh kz$$

$$c(z) = \cos kz \cosh kz$$

$$p(z) = \exp(kz) \cdot (\cos kz + \sin kz) / 2\kappa v$$

$$m(z) = \exp(kz) \cdot (\cos kz - \sin kz) / 2\kappa v$$

$$g_1(z) = 1 - s \cdot s(z) - c \cdot c(z)$$

$$g_2(z) = c \cdot s(z) - s \cdot c(z)$$

$$g_5(z) = p(z) - p \cdot s(z) + m \cdot c(z)$$

$$g_6(z) = m(z) - m \cdot s(z) - p \cdot c(z)$$

Vertikal integration av ekv. (6.6) och införande av strömfunktionen ger tryckgradienterna

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} &= -A \frac{\partial \psi}{\partial y} - B \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} D \tau_x + \frac{1}{\rho} C \tau_y \\ \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} &= B \frac{\partial \psi}{\partial y} - A \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} C \tau_x - \frac{1}{\rho} D \tau_y \end{aligned} \quad (6.7)$$

A - D bestäms enligt

$$g_1 = h - (\sin 2 kh + \sinh 2 kh) / 2 k /$$

$$(\cosh 2 kh + \cos 2 kh)$$

$$g_2 = (\sin 2 kh - \sinh 2 kh) / 2 k /$$

$$(\cosh 2 kh + \cos 2 kh)$$

$$g_5 = 2 \cdot \sin kh \cdot \sinh kh / f / (\cosh 2 kh + \cos 2 kh)$$

$$g_6 = \{1 - 2 \cos kh \cdot \cos kh / (\cosh 2 kh + \cos 2 kh)\} / f$$

vilket är g-funktionerna (z) integrerade.

$$g_0 = g_1^2 + g_2^2$$

$$A = g_1 / g_0 ; B = g_2 / g_0$$

$$C = (g_1 g_6 - g_5 g_2) / g_0 ; D = (g_1 g_5 + g_6 g_2) / g_0$$

En differentialekvation för strömfunktionerna erhålles på samma sätt som för ekv. (6.5) och får utseende enligt ekvation (6.5). a, b och T blir nu

$$a = (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}) / B$$

$$b = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}) / B$$

$$T = \{ \frac{\partial}{\partial x} (D \tau_x + C \tau_y) + \frac{\partial}{\partial y} (D \tau_y - C \tau_x) \} / E$$

där τ_x och τ_y utom just i punkter närmast stränderna är oberoende av x och y (se kapitel 4.3).

För att få så lite differensräkning som möjligt kan a, b, T beräknas analytiskt. A, B, C, D är funktioner av v och h, vilka i sin tur är funktioner av x, y.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A}{\partial h} = \frac{1}{g_0} \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial h} - A \frac{\partial g_0}{\partial h} \right\}$$

$$\frac{\partial B}{\partial h} = \frac{1}{g_0} \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial h} - B \frac{\partial g_0}{\partial h} \right\}$$

$$\frac{\partial C}{\partial h} = \frac{1}{g_0} \left\{ g_6 \frac{\partial g_1}{\partial h} + g_1 \frac{\partial g_6}{\partial h} - g_5 \frac{\partial g_2}{\partial h} - g_2 \frac{\partial g_5}{\partial h} - C \frac{\partial g_0}{\partial h} \right\}$$

$$\frac{\partial D}{\partial h} = \frac{1}{g_0} \left\{ g_5 \frac{\partial g_1}{\partial h} + g_1 \frac{\partial g_5}{\partial h} + g_6 \frac{\partial g_2}{\partial h} + g_2 \frac{\partial g_6}{\partial h} - D \frac{\partial g_0}{\partial h} \right\}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial h} = \frac{\sinh^2 2 kh - \sin^2 2 kh}{(\cosh 2 kh + \cos 2 kh)^2}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial h} = - \frac{2 \sinh 2 kh \cdot \sin 2 kh}{(\cosh 2 kh + \cos 2 kh)^2}$$

$$\frac{\partial g_5}{\partial h} = \frac{1}{k v (\cosh 2 kh + \cos 2 kh)} \{ + \cos kh \cdot \sinh kh + \\ + \sin kh \cdot \cosh kh - f \cdot g_5 \cdot (\sinh 2 kh - \sin 2 kh) \}$$

$$\frac{\partial g_6}{\partial h} = \frac{1}{k v (\cosh 2 kh + \cos 2 kh)} \{ - \cos kh \cdot \sinh kh + \\ + \sin kh \cdot \cosh kh - (f g_6 - 1) \cdot (\sinh 2 kh - \sin 2 kh) \}$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial h} = 2 g_1 \frac{\partial g_1}{\partial h} + 2 g_2 \frac{\partial g_2}{\partial h}$$

Derivatorna av typ $\frac{\partial A}{\partial v}$ blir analoga med typen $\frac{\partial A}{\partial h}$ om typ $\frac{\partial g}{\partial h}$ byts mot $\frac{\partial g}{\partial v}$. Dessa sistnämnda blir

$$\frac{\partial g_1}{\partial v} = - \frac{h}{2v} \frac{\partial g_1}{\partial h} + \frac{g_1}{2v} ; \quad \frac{\partial g_5}{\partial v} = - \frac{h}{2v} \frac{\partial g_5}{\partial h} ; \quad \frac{\partial g_2}{\partial v} = - \frac{h}{2v} \frac{\partial g_2}{\partial h} + \\ + \frac{g_2}{2v} ; \quad \frac{\partial g_6}{\partial v} = - \frac{h}{2v} \frac{\partial g_6}{\partial h} ; \quad \frac{\partial g_0}{\partial v} = \frac{g_0}{v} - \frac{h}{2v} \frac{\partial g_0}{\partial h}$$

6.1.3 Med horisontell turbulens

I en grund sjö kan den horisontella turbulensen spela en viss roll för strömmingen. Utnyttjas en horisontell friktionskoefficient, ekv. (3.19), kan en strömhastighetsprofil (ekv. 6.8) relativt enkelt bestämmas. Ekvationerna för tryckgradienterna blir enligt ekvation (6.4), och differentialekvationen blir enligt ekvation (6.5) men naturligtvis med annorlunda koefficienter.

$$u(z) = g_3(z) \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} g_4(z) \tau_x \quad (6.8)$$

Med k = horisontell friktionskoefficient och $\alpha = (k/v)^{\frac{1}{2}}$ kan funktionerna bestämmas enligt nedan. Beteckningarna gäller endast i detta sammanhang.

$$g_3(z) = \frac{1}{k} \left(-1 + \frac{\cosh(\alpha z)}{\cosh(\alpha h)} \right)$$

$$g_4(z) = \frac{1}{\alpha v} \frac{\sinh \alpha(z+h)}{\cosh(\alpha h)}$$

Koefficienterna i ekvation (6.4) blir

$$a = \frac{-\alpha k}{\alpha h - \tanh(\alpha h)} \quad b = \frac{\cosh(\alpha h) - 1}{\cosh(\alpha h)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha h - \tanh(\alpha h)}$$

och strömfunktionskoefficienterna i ekvation (6.5) blir

$$a = -c_o \frac{\partial h}{\partial x} \quad b = -c_o \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$c_o = \frac{\alpha \cdot \tanh^2(\alpha h)}{\alpha h - \tanh(\alpha h)}$$

$$T = c_3 \left\{ \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right\} + c_2 \left\{ \tau_x \frac{\partial h}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial h}{\partial x} \right\}$$

$$c_3 = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{\cosh(\alpha h)} \right) \quad c_2 = \frac{c_o}{k} \left(\frac{\alpha h}{\sinh(\alpha h)} - 1 \right)$$

Om v och k beror av djupet h , dvs. är funktioner av x och y , får c_o och c_2 tillskotten enligt nedan, där överstruken term anger värdet vid konstanta parametrar

$$\Delta c_o = (\overline{c_o} \cdot h - 1) \frac{\partial \alpha}{\partial h} / \alpha - \frac{\partial k}{\partial h} / k$$

$$\Delta c_2 = (\overline{c_2} \cdot h + c_3) \frac{\partial \alpha}{\partial h} / \alpha$$

Vill man ta hänsyn till den horisontella turbulensen på dess riktigare form med horisontell virvelviskositet, så måste strömhastigheterna itereras fram. Sedan tryckgradienterna bestämts kan detta göras med rörelseekvationerna (3.14-15). Förfaringssättet är emellertid tidsödande.

I vissa fall kan den horisontella friktionen och jordrotationen ha lika stor betydelse. Den horisontella friktionskoefficienten är då lika med f . Strömhastigheterna kan bestämmas ur en fjärde gradens differentialekvation, vars karakteristiska ekvation har lösningarna

$$(r/2v)^{\frac{1}{2}} \{ \pm (2^{\frac{1}{2}} + 1)^{\frac{1}{2}} \pm i(2^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{2}} \}$$

Strömhastigheterna kan uttryckas på samma form som ekvation (6.6), men g -funktionerna är ännu mer komplicerade.

6.2 Olika faktorens värde och inverkan

6.2.1 Jordrotationen

Vid storskalig rörelse blir jordens rotation märkbar. Den påverkar inte hastigheterna men däremot riktningarna på strömmarna. Figur 6.1a visar, hur strömmarna med ökat djup vrids åt höger och avtager, till dess botten påverkar strömningen. I samma sjö vrids strömmarna nästan inte alls, när hänsyn inte togs till jordrotationen, figur 6.1 b.

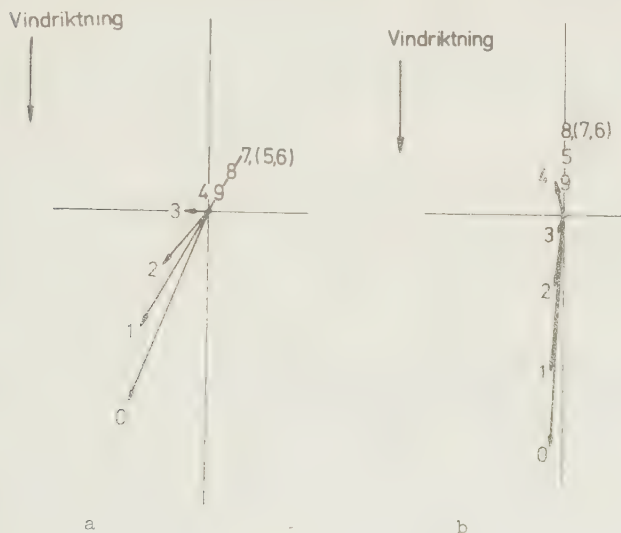


Fig. 6.1 Strömhastigheter på djupen 0; 0,1; 0,2 ... ggr djupet 5 m med och utan (till höger) hänsyn till jordens rotation. Ythastighet 10 cm/s, virvelviskositet $2 \text{ cm}^2/\text{s}$, sjöarea 50 km^2 .

Om den vertikala virvelviskositeten är liten, betyder det, att vattenmassorna "glider lätt" och därför vrids kraftigt av jordens rotation. Om sjöns botten är oregelbunden eller om sjön helt enkelt är grund, kan inverkan av botten minska jordrotationens inverkan. Hur ytströmmarna påverkas av djupet och av virvelviskositeten framgår av figur 6.1.

6.2.2 Virvelviskositetens inverkan

Redan i föregående avsnitt påpekades, att strömmarna vrids mera, om den vertikala virvelviskositeten är liten. Vindenergin transporteras då endast långsamt ner i vattenmassorna, varför

- strömmarna blir starka i ytan men dör ut snabbt vid ökat djup, vilket åskådliggöres i figur 6.3;

- b) jordrotationens inverkan blir stor (fig. 6.2);
- c) kustströmmarna blir starka, eftersom de vertikala virvlarna inte känner av botten;
- d) hela returströmningen sker mitt i sjön och nära ytan (fig. 6.3).

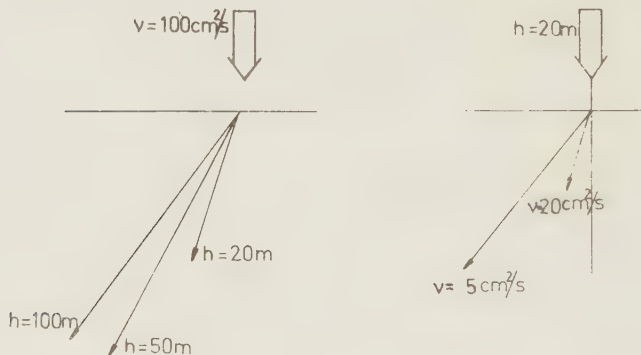


Fig. 6.2 Strömmarna påverkas mera av jordrotationen vid ökat djup och vid minskad virvelviskositet

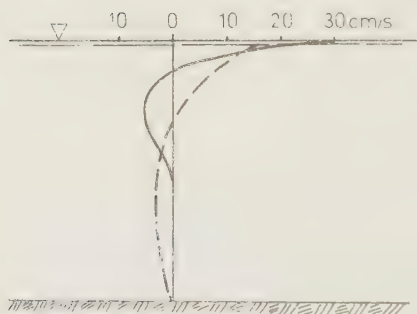


Fig. 6.3 Hastighetsprofil för virvelviskositeterna 20 cm²/s (--) och 5 cm²/s. Vindstyrka 7 m/s. Djup = 10 m.



Fig. 6.4 Strömmarna känner av botten i Velen, om virvelviskositeten är 25 cm²/s. Strömhastigheter i cm/s.

Vid kraftig turbulens och således stort värde på virvelviskositeten känner strömmarna av botten, och stora horisontella virvlar uppstår. Detta framgår av en simulering i sjön Velen med virvelviskositeten $25 \text{ cm}^2/\text{s}$. Strömbilden på 1,5 m djup visas i figur 6.4.

6.2.3 Virvelviskositetens värde

Virvelviskositeten har dimensionen längd gånger hastighet. Fältmätningarna i kapitel 5 indikerar, att virvelviskositeten är proportionell mot vindhastigheten, W . Om djupet eller alternativt språngskiktsdjupet insättes som längddimension, h , så kan man teckna

$$v = c \cdot h \cdot W \quad (h < 15 \text{ m}) \quad (6.9)$$

med c som en konstant. I kapitel 5 redovisade laboratorieundersökningar har lett fram till med ekvation (6.9) analoga ekvationer. Från figur 5.14 ses, att konstanten blir cirka $2 \cdot 10^{-5}$ vid ett sjödjup av 15 m. Med utnyttjande av resultaten från kapitel 4 ger Jobson och Sayres [5.24] mätningar $c = 3 \cdot 10^{-5}$, vilket på grund av att deras mätningar hänför sig till kanalströmning inte är helt jämförbart.

Man brukar uppskatta ytströmmarnas hastighet i en sjö till 2-3% av vindhastigheten. Med skjuvkraften beräknad enligt kapitel 4 kan virvelviskositeten uppskattas ur hastighetsprofilen enligt ekvation (6.2) till ett uttryck enligt ekvation (6.9) med $c = 1,2 - 1,8 \cdot 10^{-5}$. Vid närvaron av ett friktionsfritt språngskikt kan konstanten uppskattas ur den i nästa kapitel redovisade ekvation (7.1) till $c = 1,8 - 2,2 \cdot 10^{-5}$. Med virvelviskositeten beräknad enligt ekvation (6.9) och med ett konstantvärde enligt ovan blir i modellerna enligt avsnitt 6.1.2 och 6.1.3 ytströmmarna cirka 2-3% av vindhastigheten, om djupet är mindre än 15 m. Vid större djup måste $h = 15 \text{ m}$ insättas i ekvation (6.9), för att inte strömhastigheterna i ytan skall bli för små.

6.2.4 Virvelviskositetens horisontella fördelning

Ekvation (6.9) är rimlig, eftersom stort djup medger större turbulenta virvlar och stor vindhastighet medger ökad omblandning. Om virvelviskositeten skulle variera över hela sjön och vara proportionell mot djupet, skulle emellertid detta enligt modellen medföra mycket starka kustströmmar. v bör sålunda vara förhållandevis konstant över sjön. Man kan emellertid även tänka sig det motsatta förhållandet, dvs. att omblandningen är störst invid stränderna. Ett högt virvelviskositetsvärde invid stränderna skulle ge en jämnt fördelad strömning med svaga strömmar längs stränderna. I tabellen nedan är virvelviskositeten i sjömitt hela tiden $20 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Tabell 6.1 Strömhastigheter (cm/s) för olika virvelviskositetsvärden

Läge	$v \sim h$	$v = \text{konst}$ $= 20 \text{ cm}^2/\text{s}$	$v = 100 \text{ cm}^2/\text{s}$ vid stranden
ytström i sjömitt	5,8	5,8	5,8
ytström 750 m från land	13,9	7,2	3,8
ytström 150 m från land	16,8	3,4	0,7
returström i sjömitt	2,4	2,2	2,2

Om virvelviskositeten är hög vid stranden uppnås i modellen analog men kraftigare effekt som vid hög horisontell turbulens. Ett sådant högt virvelviskositetsvärde skulle troligen kunna ses som en kombinerad effekt av advektiv och turbulent spridning.

6.2.5 Virvelviskositetens vertikala fördelning

Den vertikala virvelviskositetens fördelning i en vertikal är i stort sett okänd. Just i ytan och vid botten måste vertikala virvlar av fysikaliska skäl vara mycket små. Även i språngskiktet mellan två homogena vattenmassor är turbulensen dämpad. Strömmarna under resp. över termoklinen glider därvid fram ganska opåverkade av varandra.

Hur hastighetsprofilen förändras vid olika viskositetsfördelning har studerats i en teoretisk modell. Hänsyn har därvid tagits endast till vattenytans lutning samt det vertikala rörelsemängdsutbytet. Barotropiska förhållanden förutsättes. Strömhastigheterna blir därvid

$$u(z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \{ z \cdot N(z) - \tilde{N}(z) + h \cdot N(-h) + \tilde{N}(-h) \} + \tau \{ N(z) - N(-h) \} \quad (6.10)$$

där

$$\underline{N}(z) = 1/v(z); \quad N(z) = \int \underline{N}(z) dz; \quad \tilde{N}(z) = \int N(z) dz;$$

Tryckgradienten kan bestämmas, om strömningen antages vara endimensionell. Virvelviskositeten kan varieras godtyckligt om numerisk integration tillgripes. I annat fall måste enkla funktionsuttryck användas.

Eftersom vindens inverkan måste vara störst i ytskiktet, kan det vara naturligt att pröva en fördelning med maximivärdet i ytan. En mot djupet avtagande virvelviskositet ger främst vid botten starkare strömmar än vad konstant virvelviskositet ger, se figur 6.5.

Ju snabbare virvelviskositeten avtager med djupet desto längre ner sker och desto mer koncentrerad blir returströmmen, något som framgår av figur 6.6. Vindhastigheten är 7 m/s.

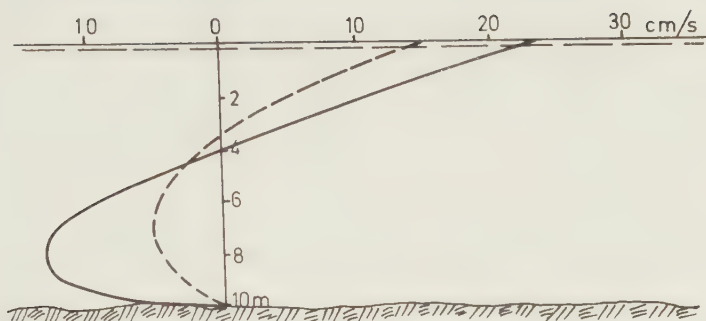


Fig. 6.5 Hastighetsprofil för v linjärt avtagande från $10 \text{ cm}^2/\text{s}$ vid ytan till 0 vid botten samt för konstant virvelviskositet $10 \text{ cm}^2/\text{s}$ (--)

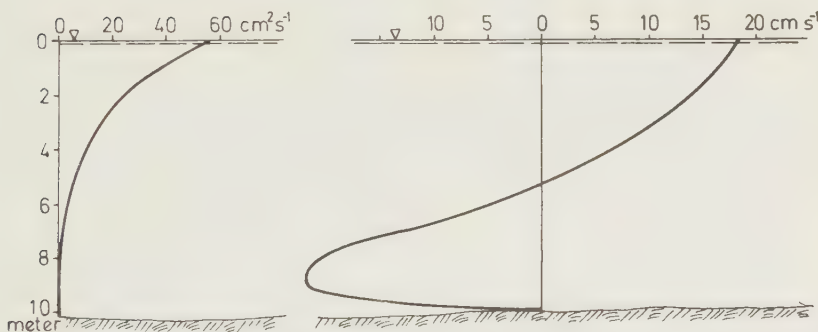


Fig. 6.6 Virvelviskositetsfördelningen till vänster ger hastighetsprofilen till höger

Våra fältmätningar indikerar, att virvelviskositeten har ett maximum några meter under ytan. Ytvärdet är i regel lägre än medelvärdet för vertikalen. En hastighetsprofil erhållen med en parabolisk virvelviskositetsfördelning visas i figur 6.7. Strömmarna koncentreras något mot yta och botten. Hastighetsprofilen kan jämföras med den vid laboratorieförsök av Baines och Knapp [5.3] uppmätta hastighetsprofilen, vilken visas i figur 6.8. Denna profil styrker antagandet om en parabolisk virvelviskositetsfördelning. Även den av Jobson och Sayre [5.24] utförda laboratorieundersökningen av den vertikala utbyteskoefficienten för massa i ett kanalförlöde visar en parabolisk fördelning.

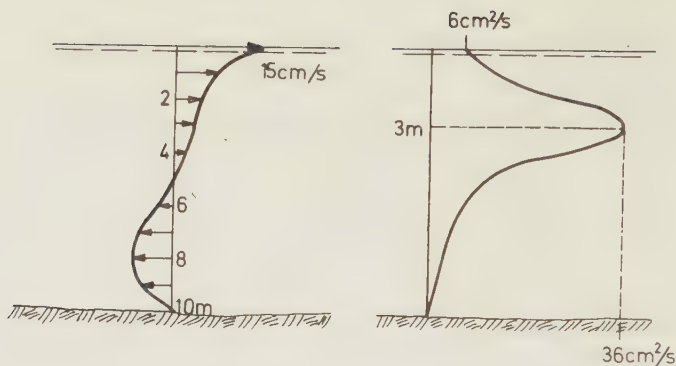
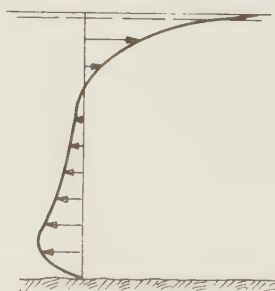


Fig. 6.7 Hastighetsprofilen till vänster erhålles med virvelviskositetsfördelningen till höger

Fig. 6.8 Av Baines och Knapp i laboratorium uppmätt hastighetsprofil



Virvelviskositeten kan anses vara paraboliskt fördelad i en vertikal med ett medelvärde bestämt ur ekvation (6.9). Konstant virvelviskositet ger dock en liknande hastighetsprofil, och den storskaliga strömningen påverkas föga av den vertikala fördelningen. Den horisontella virvelviskositetsfördelningen bör vara ganska jämn över hela sjön.

6.2.6 Horisontell turbulens

Genom närmare studium av de teoretiska modellerna finner man, att den horisontella turbulensen föga påverkar strömningen utom vid små vindstyrkor samt i grunda områden. Den verkar dessutom som en dämpande faktor vid transient strömning.

Den horisontella turbulensen verkar allmänt sett utjämnande på strömningen och förhindrar därigenom uppkomsten av alltför kraftiga kust-

strömmar. En jämförelse av strömhastigheten i olika lägen för olika horisontella friktionskoefficienter, k , göres nedan. Maxdjupet är 10 m.

Tabell 6.2 Strömhastigheter (cm/s) för olika friktionskoefficienter

Platsens avstånd från strand // vindriktningen (m)		Djup (m)	$k = 0$	$k = 10^{-5}$	$k = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
250	ytström	3	4,4	4,1	3,7
750	ytström	5	7,2	7,1	5,6
1700	ytström	8	6,6	6,4	5,2
Sjömitt	ytström	10	6,0	5,8	5,0
Sjömitt	returström	10	2,2	2,2	1,7

Då den horisontella turbulensen ökar minskar ytströmmens hastighet samtidigt som den blir mera jämnt fördelad över sjön. Tendensen till stark ström 1 km ut från stranden försvinner alltmåra.

Storleken av friktionskoefficienten är osäker. Om såväl den horisontella som den vertikala friktionen beskrivs med ekv. (3.19) meddelar Neuman [1.4] : $k = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ för de översta 1000 m i oceaner och $k = 7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ för Östersjön. Det större k -värdet i Östersjön anser han beror på det grundare vattnet. I sjöar bör således k vara ännu större.

I den i avsnitt 6.1.3 omnämnda tre-dimensionella iterationsmodellen kan hänsyn tagas till den horisontella turbulensen i form av horisontell virvelviskositet. Endast vid mycket hög virvelviskositet, 5-10.000 cm^2/s , påverkas strömmarna och då endast kustströmmarna, vilka blir något lägre, 10%, än om de beräknas utan hänsyn till den horisontella turbulensen.

6.3 Modell applicerad på sjön Velen

6.3.1 Jämförelse mellan beräknade och mätta strömmar

Modellen enligt avsnitt 6.1.2 har applicerats på sjön Velen vid ett tillfälle, då sjöns vattenmassor var i det närmaste densitetshomogena, oktober 1970. Vinden var VSV 5 m/s, vilket enligt kapitel 4 ger en skjuvkraft av 0,35 dyn/cm^2 . Bäst överensstämmelse mellan beräknade och uppmätta strömmar nåddes med virvelviskositeten 15 cm^2/s , som erhöles ur ekvation (6.9) om konstanten $c = 2 \cdot 10^{-5}$. Beräkningarna utfördes med ett längdsteg av 40 m. Mätningarna utfördes med hjälp av strömkors. Mättningsförfarandet är utförligt beskrivet i IHD-rapporter från sjögruppen [3]. Det bör påpekas, att de redovisade strömmarna inte är korregerade för vindens och ytströmmens inverkan på flödet.

Man finner att

- ytströmmarna i modellen stämde överens med de uppmätta;
- med ökat djup vred de i modellen beräknade strömmarna åt vänster, vilket bekräftades av strömkorsmätningarna;
- returströmmarna gick i huvudsak fram längs västra stranden. Även detta stämde med modellen, i vilken returströmningen längs västra

stranden började redan på fem meters djup men i mitten av sjön först på 9 m djup. En jämförelse för sjöns djupare delar mellan de beräknade och uppmätta strömmarna, vilka markerats med nivå-siffror, ses överst i figur 6.9.

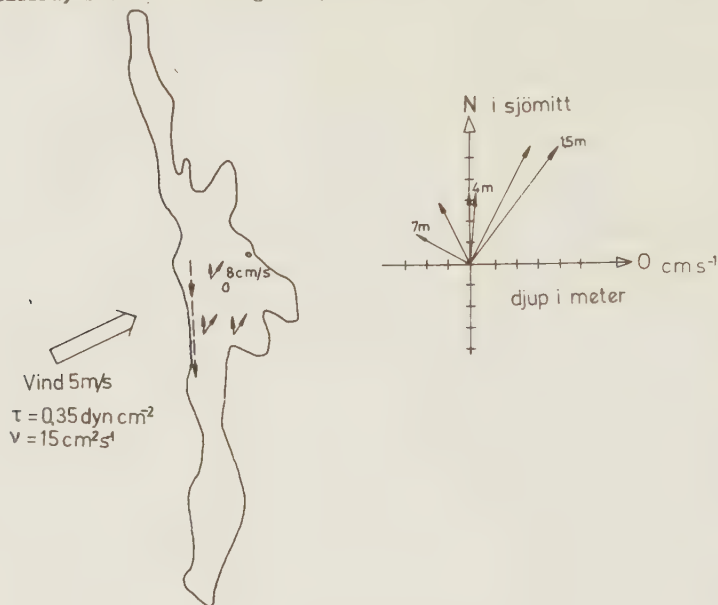


Fig. 6.9 Strömning i sjön Velen (oktober 1970)

Beräknade och mätta strömmar över hela sjön på 1 meters djup jämföres i figur 6.10. Överensstämmelsen är god. Jämförelse göres också för 4 m:s nivån. Även här är överensstämmelsen god, men dock sämre än på 1 m:s nivån. Strömkorsets flöte kan ha inverkat så, att samtliga uppmätta strömhastigheter har för stor ostlig komponent.



pos. nr	1 m nivå				4 m nivå			
	mätt	beräknad	mätt	beräknad	mätt	beräknad	mätt	beräknad
	strömhastigh.(cm/s)		strömhastigh.(cm/s)		strömhastigh.(cm/s)		strömhastigh.(cm/s)	
1	N	2,5	N	2,3	-	V	2,0	
2	NNO	2,0	N	2,5	NV	1,5	V	4,0
3	NO	6,0	ONO	6,0	NNV	4,0	NNV	3,8
4	N	7,0	N	6,6	NNV	3,5	NV	3,0
5	N	7,0	N	6,5	NNV	5,0	NV	3,8
6	NNO	10,5	NO	9,5	NNO	6,0	NNO	4,8
7	NNO	10,0	NNO	10,0	NNO	4,0	N	3,0
8	ONO	3,5	NO	5,0	SO	1,5		0,0
9	NNO	6,0	ONO	6,0	NO	1,5	NNO	2,0

Fig. 6.10 Jämförelse mellan beräknade och mätta strömmar i Velen

6.3.2 Teoretisk beräkning av strömsituationer

Med modellen har strömningen i Velen på teoretisk väg beräknats för olika vindriktningar. Dessa strömningssimuleringar visar:

Ytströmmen går i vindens riktning. Vid låg vindstyrka är emellertid inverkan av jordens rotation så stor, att strömriktningen är vriden nära 45° åt höger. I gengäld påverkas strömningen föga av öar eller vikar. Kraftigare vindar ger kring ön, vid grundet söder om ön samt i Habelsbolsviken upphov till virvlar. SV och SO om ön uppstår vertikallströmmar.

Strömmarna börjar vid stark vind vända vid 3,5 m djup och har helt vänt vid 5 m djup. Den maximala returströmningen inträffar på 8 m djup och är koncentrerad till djupfåran. Returströmmen är betydligt kraftigare, så vinden blåser i sjöns längdriktning än då den blåser tvärs sjön. Vid svag vind vrider strömmen hela tiden åt höger med ökat djup. Någon egentlig returströmning kan man då inte tala om.

Som exempel på hur modellen kan användas visar resultaten för fallen sydlig resp. västlig vind. Vindstyrkan sattes till 10 m/s för att strömmarna skulle känna av botten och virvlar kunna bildas.

Vid sydlig vind, se figur 6.11, är ytströmmen nordlig 13 cm/s i mittbassängen samt 5-6 cm/s i norra resp. södra bassängen. Under ytan (1,5 m) går nordströmmen längs västra stranden (7 cm/s), men strömmen ute i själva bassängen vrider svagt åt höger. Strömmen börjar vända vid 3,5 m djup, vilket gör, att en mängd virvlar uppstår på denna nivå. Returströmning råder mera generellt från och med 5 m djup. I öster pressas vattnet mot sjöns mitt, där strömningen över djupfåran är sydlig 7 cm/s. Även vid västra stranden är strömmen sydlig men mycket liten. Längre ner i djupet sker hela tiden en returströmning över djupfåran med en maximal returström av 9 cm/s mellan 7 och 12 m.

Förhållandena kring ön och grundet kan närmare studeras. Mellan 1,5-6 m pressas vatten norrifrån in i den djupfåra, som ligger öster om ön. Detta vatten måste stiga mot ytan för att komma ut från fåran. Därför blir ytströmmen söder samt väster om ön accelererad och får tillskott i sin väst- resp. nordkomponent. Kring grundet blir strömningen motsols, eftersom vattnet strävar efter att följa bottenkonfigurationen. Strömningssmönstret för 1,5 m djup visas i figuren. Vid Habelsbolet går strömmen mellan 1 - 4 m svagt motsols.

I norra bassängen, som delvis fungerar som en självständig sjö, vänder hela strömmen vid 1,5 m. Strömmarna är här i norr små. I den södra bassängen, som står mera i direktkontakt med mittbassängen är strömmarna kraftigare. Strömmen börjar vända i mittfåran redan på 1,5 m djup, men längs stränderna finns fortfarande kvar nordliga strömmar av storleken 5 cm/s. På djupare vatten sker returströmningen i söder längs vänstra stranden och är på 8 m djup hela 6 cm/s.

Vid västlig vind, se figur 6.12, är ytströmmarna ostliga med en svag sydlig komponent. Virveln kring ön är medsols och den kring grundet svagt motsols. Det är emellertid inga helt markerade virvlar, eftersom inga strömmar med nordlig komponent finns.

I den norra bassängen vider strömmen medsols (5 cm/s i ytan och 3 cm/s på 1,7 m djup). I den södra bassängen finns en motsolsvirvel, så att den sydgående strömmen går längs västra stranden och den nordgående längs östra stranden.

Mellan 1 och 4 m djup konvergerar strömmarna kraftigt mot en punkt SSV ön.

På 5 m djup är strömmarna västliga men svaga. De vänder vid ökat djup något mot norr med maximal styrka 5 cm/s vid 9 m.

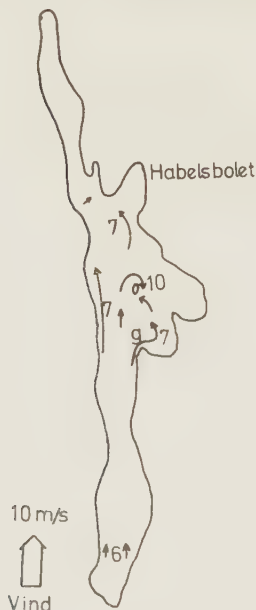


Fig. 6.11 Teoretiskt beräknade strömmar på 2 m djup i Velen vid sydlig vind. Strömhastigheter angivna i cm/s.
g = grund

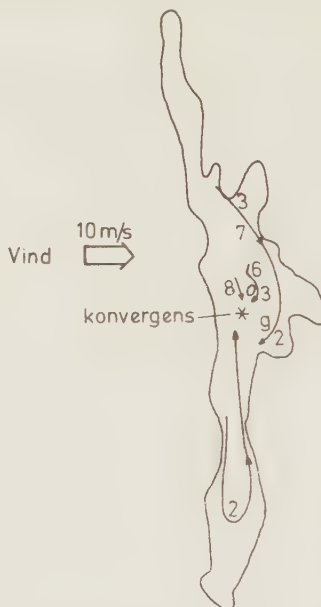


Fig. 6.12 Teoretiskt beräknade strömmar på 2 m djup i Velen vid västlig vind.

6.4 Genomströmning förorsakad av in- och utflöde

Ut- och inflöden påverkar naturligtvis strömningen i en sjö. För att tillfredsställa kontinuitetsekvationen måste strömfunktionen ändra värde längs stränderna, om ett ut- eller inflöde finns. De nya randvärdena framgår av figur 6.13.

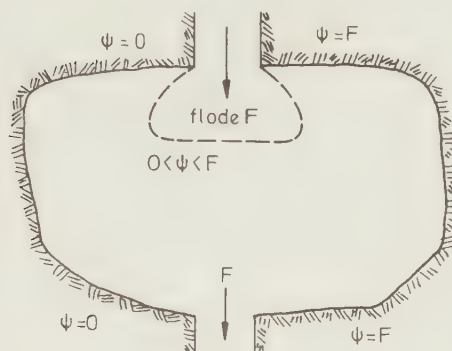


Fig. 6.13 Randvärden vid genomströmning

Den inträngande rörelsemängden antages snabbt förlorad genom friktion mot botten. Tränger flödet in i sjön utan att ha bottenkontakt, t.ex. ett utsläpp från ett kraftverk, måste området närmast utflödet behandlas med jetstråleteori, och randvillkoren längs den streckade linjen bestämmas ur den flödesfördelning, som erhålles med jetstråleberäkningarna.

Litteratur

1. Bengtsson, L. [1971]. Modellstudier av vindinducerad strömning i en sjö. - Sjöars dynamik, Report 6 (5.4), p. 58-83, Int. Hydrological Decade, Sweden.
2. Bengtsson, L. [1973]. Deterministic model of wind generated circulation. - Lake Velen project 8, Int. Hydr. Decade, Sweden.
3. Matsson, J.I. [1971]. Instrumentering och datainsamling. - Sjöars dynamik, Report 6 (5.1), p. 43-46. Int. Hydrological Decade, Sweden.
4. Plate, E. [1970]. Water surface velocities induced by wind shear. - J. Eng. Mech. Div, ASCE 96 (3), p. 295-312.
5. Rodgers, G.K. [1964]. Drift card studies - Lake Huron. - Proc. 7:th Conf. Great Lakes Res., p. 357-361.

Kapitel 7. STATIONÄR BAROKLINISK STRÖMNING

7.1 Modell i vilken hypolimnion och epilimnion påverkar varandra

- .1 Två-dimensionell strömning
- .2 Tre-dimensionell strömning
- .3 Slutsatser av modellen

7.2 Modell med dämpad friktion i språngskiktet

- .1 Epilimnionströmmar
- .2 Hypolimnionströmmar
- .3 Övergångszon
- .4 Skjuvkraftsfördelning
- .5 Glatt språngskikt
- .6 Termoklinens lutning
- .7 Simulerad strömning

7.3 Skiktad modell applicerad på Velen

- .1 Jämförelse mellan mätt och beräknad strömsituation
- .2 Teoretisk strömsituation
- .3 Slutsatser om den skiktade modellen

Litteratur

Sammanfattning

Modeller för strömningen i en tvåskiktad sjö presenteras. Olika friktionsförhållanden i språngskiktet prövas. Skjuvkraften i språngskiktet finnes vara liten. Modellströmmarna stämmer med i Velen uppmätta strömmar, om rörelsemängdstransport över termoklinen endast äger rum, där denna har bottenkontakt.

- Figurer 7.1 Strömprofiler för olika friktionsantaganden.
Velocity profiles for different assumptions of the friction
- .2 Randvillkor för strömfunktioner
Boundary conditions of stream functions
 - .3 Typisk strömhastighetsprofil
Typical stream velocity profile
 - .4 Ekman-spiral med språngskiktsdjupet 10 m
Ekman spiral with 10 m depth of thermocline
 - .5 Ekman-spiral med språngskiktsdjupet 20 m
Ekman spiral with 20 m depth of thermocline
 - .6 Hastighetsprofil för virvelviskositeten $5 \text{ cm}^2/\text{s}$ i hypolimnion respektive $1 \text{ cm}^2/\text{s}$ (punkterad)
Velocity profile for the eddy viscosity $5 \text{ cm}^2/\text{s}$ in the hypolimnion and $1 \text{ cm}^2/\text{s}$ (pointed line)
 - .7 Skjuvkraftsfördelning enligt kapitel 7.2.1-2
Distribution of the shear according to chapter 7.2.1-2
 - .8 I övergångszonen har språngskiktsskjuvkraften värde
In the boundary between homogeneous and stratified water shear exists in the thermocline
 - .9 Flödesschema för tvåskiktad modell
Flow chart of two-layered model
 - .10 Strömning i sjön Velen
Circulation in Lake Velen
 - .11 Teoretisk strömbild på 2 m djup
Theoretical circulation pattern at the depth of 2 m

Tabeller -

Ekvationer 7.1-7

Speciella beteckningar

- a = friktionsfaktor
E = som index: epilimnion
G = som index: gränssyta = termoklinen
H = som index: hypolimnion
 v_H = vertikal virvelviskositet i hypolimnion
 v_{HE} = horisontal virvelviskositet i epilimnion

Vid beräkning av hypolimnionströmmar användes ett koordinatsystem med $z = 0$ i språngskiktet. Därför betecknar u och v med index 0 termoklinströmmar.

7.1 Modell i vilken hypolimnion och epilimnion påverkar varandra

7.1.1 Två-dimensionell strömning

Om en sjös vattenmassa inte är homogen, brukar den vara uppdelad i två i det närmaste homogena skikt, åtskilda av en diskontinuitetsyta, termoklinen. Den enklaste tillämpningen av ett sådant fall är strömningen i en smal sluten kanal. Ekvation (6.1) löses med de nya randvillkoren, kontinuerlig skjuvkraft och strömhastighet över termoklinen. Med index E för epilimnion, det övre skiktet, och index H för hypolimnion, det undre skiktet, erhålles hastighetsprofiler enligt figur 7.1 med den bestämmande parametern

$$a = v_H / v_E \cdot h_E / h_H$$

Ekvationerna för strömhastigheterna blir, om $z = 0$ i ett skikts övre gräns och $z = -h_E$ eller $z = -h_H$ i skiktets undre gräns och om index G betecknar diskontinuitetsytan

$$u_E = \frac{\tau h_E}{4v_E} \left(1 + 4 \frac{z}{h_E} + 3 \frac{z^2}{h_E^2} + (1 - 3 \frac{z^2}{h_E^2}) / (3 + 4a) \right) \quad (7.1)$$

$$u_H = u_G \left(1 + 4 \frac{z}{h_H} + 3 \frac{z^2}{h_H^2} \right) \quad (7.2)$$

$$u_G = \tau_G h_H / 4v_H ; \quad \tau_G = - \tau \cdot 2 \frac{a}{3 + 4a}$$

7.1.2 Tre-dimensionell strömning

Om en hel sjö studeras tillgodoses kontinuitetsvillkoret med hjälp av strömfunktioner på samma sätt som i kapitel 6.1. Skikten påverkar emellertid varandra och strömfunktioner måste införas för båda skikten. Den kopplade differentialekvationen lyder

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_E + A_1 \nabla^2 \psi_H + B_1 \frac{\partial \psi_H}{\partial x} + C_1 \frac{\partial \psi_H}{\partial y} + D_1 \frac{\partial \psi_E}{\partial y} + E_1 \frac{\partial \psi_E}{\partial x} + F_1 &= 0 \\ \nabla^2 \psi_H + A_2 \nabla^2 \psi_E + B_2 \frac{\partial \psi_E}{\partial y} + C_2 \frac{\partial \psi_E}{\partial x} + D_2 \frac{\partial \psi_E}{\partial y} + E_2 \frac{\partial \psi_E}{\partial x} + F_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

För de oskiktade delarna av sjön kan differentialekvationen (6.5) användas. Randvillkor för strömfunktionerna framgår av figur 7.2. Med strömfunktionerna givna erhålles tryckgradienterna och från dessa strömhastigheterna. Om hänsyn toges till jordens rotation, blir koefficienterna i ekvation (7.3) mycket komplicerade uttryck. De kräver minst 10 sidors utrymme och publiceras därför inte.

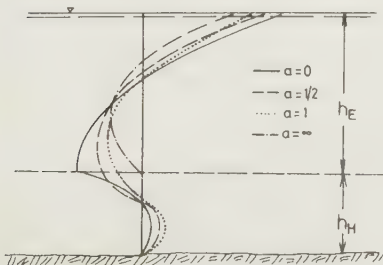


Fig. 7.1

Strömprofiler för olika friktionsantaganden



Fig. 7.2 Randvillkor för strömfunktioner

7.1.3 Slutsatser av modellen

Denna modell gör det möjligt att bestämma inverkan av t.ex. språngskiktändring eller variation av turbulensen i övre respektive undre skiktet. Man kan även beräkna skjuvkraften längs botten och längs diskontinuitetsytan. En typisk profil framgår av fig. 7.3. Man observerar hur skjuvkraften når minimivärde strax ovanför språngskiktet, något som överensstämmer med observationer i fält. Vidare ses att strömningen i hypolimnion blir mycket liten.

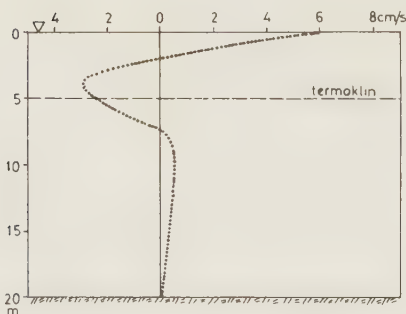


Fig. 7.3 Typisk strömhastighetsprofil

Enligt modellen medför en ökning av språngskiktet a) ökad ythastighet, b) ökad lateralhastighet, dvs. ökat inflytande av jordrotationen, c) ökad bottenfriktion.

Figur 7.4 och 7.5 visar Ekman-spiraler för språngskiktsdjupet 10 respektive 20 meter i en 30 meter djup vertikal. Den streckade delen anger undre skiktet.

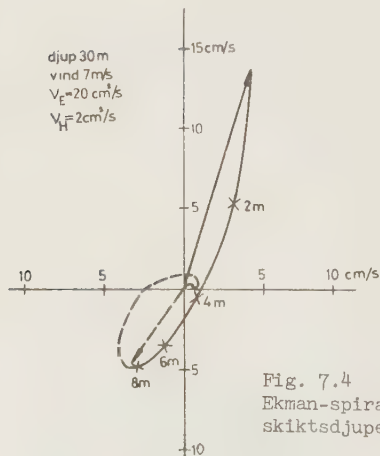


Fig. 7.4 Ekman-spiral med språngskiktsdjupet 10 m

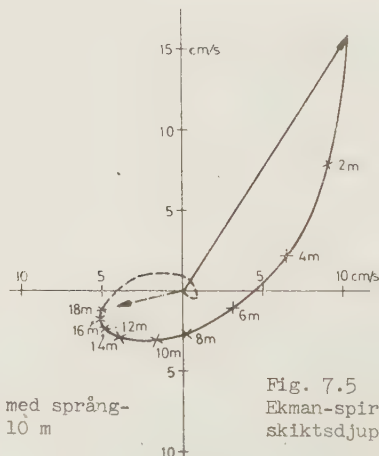


Fig. 7.5 Ekman-spiral med språngskiktsdjupet 20 m

Turbulensen i hypolimnion påverkar i mycket ringa utsträckning strömhastigheterna i epilimnion. Däremot inverkar naturligtvis hypolimnions virvelviskositetsvärde på strömmarna i undre skiktet. Låga virvelviskositetsvärden medför a) en med djupet snabbt utdöende strömning, b) liten bottenfriktion. Figur 7.6 visar hastighetsprofilen för olika virvelviskositetsvärden i hypolimnion.

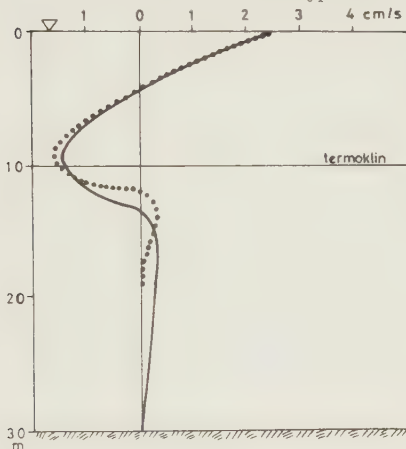


Fig. 7.6 Hastighetsprofil för virvelviskositeten $5 \text{ cm}^2/\text{s}$ i hypolimnion respektive $1 \text{ cm}^2/\text{s}$ (punkterad)

Ur fig. 7.3 eller fig. 7.6 kan utläsas, att hastighetsgradienten i gränsskiktet är mycket liten. Skikten glider alltså nästan mot varandra, "no-slip-boundary". Skjuvkraften i gränsskiktet är vid dessa profiler av storleksordningen $0,02 \text{ dyn/cm}^2$. Vid låga värden på virvelviskositeten i epilimnion kombinerat med stora sprängskikt djup ändras profilen så, att returströmningen sker långt ovanför diskontinuitetsytan. Hastighetsgradienten i gränsskiktet blir emellertid ändå liten.

7.2 Modell med dämpad friktion i sprängskiktet

7.2.1 Epilimnionströmmar

Det är välkänt, att en kraftig skiktning dämpar turbulensen, något som kan ses av ekvation (5.35). Såväl Csanady's [5.13], Hale's [5.18] som Silker's [5.34] mätningar visar, att virvelviskositeten är liten i sprängskiktet. Lågt virvelviskositetsvärde kombinerat med liten hastighetsgradient, se föregående avsnitt, gör att skjuvkraften i termoklinen blir liten. Hypolimnion påverkar knappast epilimnion. Hur strömmar under respektive över termoklinen glider fram opåverkade av varandra har många gånger observerats i fält, se t.ex. Edenman [2].

Om nu skjuvkraften på nivån $z = -h$ är mycket liten, så blir masstransportekvationerna (3.20-21) relativt enkla. Strömfunktionsdifferential-ekvationen (3.24) kan, om man beaktar att vindskjuvkraften bör vara konstant mitt i sjön, där vattenmassorna är skiktade, och om sprängskiktsdjupet, h , antages vara konstant, förenklas till

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad \text{eller} \quad \nabla^2 \psi = 0 \quad (7.4)$$

I det första fallet införes den horisontella turbulensen enligt ekvation (3.25) och i det andra enligt ekvation (3.26). Eftersom den hori-

sonbella turbulensen har mycket liten inverkan på strömmingen, blir resultatet likartat för båda betraktelsesätten. Tryckgradienterna fås ur ekvationerna (3.20-21), i vilka hela den materiella derivatan antages lika med noll, och i vilka skjuvkraften på nivån h sättes lika med noll. Trots att ekvation (7.4) bygger på den horisontella turbulensen finner man, att strömmingen blir likartad, om den horisontella turbulensen helt försummas. Jämförelse kan göras med en ren iterationsmodell. Strömhastigheterna kan tecknas enligt ekvation (6.6). g -funktionerna blir

$$g_1(z) = 1 \quad g_2(z) = 0$$

$$g_5(z) = 2\alpha \cos(kz) \cosh(kz) - 2\beta \sin(kz) \sinh(kz) + \\ + \frac{e^{-kz}}{2kv} \{ \sin(kz) - \cos(kz) \}$$

$$g_6(z) = -2\beta \cos(kz) \cosh(kz) - 2\alpha \sin(kz) \sinh(kz) - \\ - \frac{e^{-kz}}{2kv} \{ \sin(kz) + \cos(kz) \}$$

$$c = 8kv \cdot (\cosh^2 kh - \cos^2 kh)$$

$$\alpha = \frac{1}{c} \cdot (\exp 2kh - \cos 2kh - \sin 2kh)$$

$$\beta = \frac{1}{c} \cdot (-\exp 2kh + \cos 2kh - \sin 2kh)$$

7.2.2 Hypolimnionströmmar

Tvåskiktsmodellen utgår från, att skjuvkraften i gränssytan är nästan lika med noll. För att rörelsemängd skall kunna föras genom termoklinen måste skjuvkraften dock ha ett visst, om än litet värde. Strömhastigheterna kan därvid sättas lika på båda sidor om termoklinen. Med randvillkor att strömmingen längs botten skall vara noll samt känd hastighet i termoklinen (index 0) kan strömhastigheterna för det undre skiktet lösas ut:

$$u(z) = -h_1(z) \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + h_2(z) \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + u_0 h_3(z) - v_0 h_4(z)$$

$$v(z) = h_2(z) \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + h_1(z) \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + u_0 h_4(z) + v_0 h_3(z) \quad (7.5)$$

Tryckgradienterna beräknas genom integrering av ekvation (7.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= + A \frac{\partial \psi}{\partial y} + B \frac{\partial \psi}{\partial x} + D u_o + C v_o \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= - B \frac{\partial \psi}{\partial y} + A \frac{\partial \psi}{\partial x} + C u_o - D v_o \end{aligned} \quad (7.6)$$

Genom derivering och subtraktion kan på samma sätt som tidigare tryckgradienterna elimineras och en differentialekvation för strömfunktionerna enligt ekvation (6.5) erhållas. Modellen fungerar så, att strömfunktionerna först bestäms för epilimnion ur ekvation (7.4) och för de oskiktade delarna ur ekvation (6.5), varefter strömningen för hela det övre skiktet kan bestämmas. (Tryckgradients ur ekvation (3.20-21) samt ur ekvation (6.7), strömhastigheter ur ekvation (6.6).) Därefter bestäms strömfunktionerna för hypolimnion ur ekvation (6.5) med strömförhållandena i termoklinen som randvillkor. Tryckgradients och strömhastigheter fås sedan direkt ur ekvationerna (7.5-6).

Med $z = 0$ i termoklinen och $z = -h$ vid botten blir koefficienterna i ekvationerna (6.5, 7.5-6) enligt nedan.

- a) med viss liten friktion i termoklinen, utan jordrotation, utan horisontell turbulens

$$h_3(z) = (1 + \frac{z}{h}) ; \quad h_2(z) = \frac{1}{v} \frac{z^2 + hz}{2}$$

$$A = 0 ; \quad B = 12/h^3 ; \quad C = 6/h^2 ; \quad D = 0$$

$$T = \frac{h}{2} \left\{ \frac{\partial u_o}{\partial y} - \frac{\partial v_o}{\partial x} \right\} + v_o \frac{\partial h}{\partial x} - u_o \frac{\partial h}{\partial y} ; \quad a, b, c \text{ enligt kapitel 6.1.1.}$$

- b) med viss friktion i termoklinen, utan jordrotation, med horisontell turbulens

$$\alpha = (k_H / v_H)^{\frac{1}{2}} ; \quad k_H = \text{horisontell friktionskoefficient för hypolimnion}$$

$$h_3(z) = \frac{\sinh \alpha(z+h)}{\sinh \alpha h} ; \quad h_2(z) = \frac{1}{k_H \cdot \sinh \alpha h} \{ \sinh \alpha(z+h) - \sinh \alpha z - \sinh \alpha h \}$$

$$A = 0 ; \quad B = \frac{d}{\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} \cosh \alpha h + h \cdot \sinh \alpha h} ;$$

$$C = \frac{(\cosh \alpha h - 1) \cdot d}{\sinh \alpha h \cdot (2 - 2 \cosh \alpha h + \alpha h \sinh \alpha h)} ; \quad d = k_H \cdot \sinh \alpha h ;$$

$$D = 0$$

a, b enligt kapitel 6.1.1 med

$$c = -\alpha \frac{\sinh^2 \alpha h + 2 - 2 \cosh \alpha h}{\sinh \alpha h \cdot (2 - 2 \cosh \alpha h + \alpha h \sinh \alpha h)}$$

$$T = T_1 \left(v_o \frac{\partial h}{\partial x} - u_o \frac{\partial h}{\partial y} \right) + T_2 \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} - \frac{\partial v_o}{\partial x} \right)$$

$$T_1 = \frac{(\sinh \alpha h - \alpha h) \cdot (\cosh \alpha h - 1)}{\sinh \alpha h \cdot (2 - 2 \cosh \alpha h + \alpha h \cdot \sinh \alpha h)}$$

$$T_2 = \frac{\cosh \alpha h - 1}{\alpha \cdot \sinh \alpha h}$$

7.2.3 Övergångszon

I kapitel 7.1 visas att förhållandena i hypolimnion föga påverkar strömmarna i epilimnion. Detta måste ju gälla i ännu högre grad, om turbulensen är dämpad i språngskiktet. I övergångszonen mellan skiktade och oskiktade vattenmassor bör dock en viss skjuvning uppstå i språngskiktet. Närheten till botten i kombination med att språngskiktet är rörligt vid ändpunkterna gör, att det undre skiktet här bör kunna påverka det övre.

Differentialekvationerna (7.4) skall därvid ha utseendet

$$\nabla^4 \psi = v_{HE}^{-1} \cdot A / \rho$$

eller med friktionskoefficient k_E

$$\nabla^2 \psi = - \frac{1}{k_E} \cdot A / \rho$$

där
$$A = \frac{\partial \tau_{xh}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yh}}{\partial x}$$

Dessa ekvationer är emellertid beroende av den horisontella turbulensen, vilken som tidigare nämnts är av mindre betydelse. Även i övergångszonen behålls därför de ursprungliga ekv. (7.4). I tryckekvationen är emellertid τ_h frikopplad från den horisontella turbulensen. Någon egentlig möjlighet att beräkna τ_h finns inte, men bottenfriktionen från närmaste homogena punkt användes.

En förfining av modellen just i övergångszonen enligt ovan ändrar emellertid de beräknade strömhastigheterna endast i övergångszonen och där med mindre än 10 %.

7.2.4 Skjuvkraftsfördelning

Skjuvkraftens fördelning i den förenklade modellen återges i figur 7.7. Någon diskontinuitet i termoklinen kan naturligtvis inte existera. Virvelviskositeten i språngskiktet sjunker till värden av molekylär storleksordning, något som eventuellt kompenserar felet i skjuvkraftsantagandet, så att man i själva verket räknar med en fördelning enligt den streckade linjen.

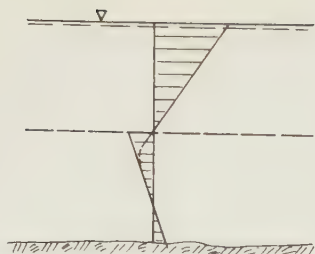


Fig. 7.7 Skjuvkraftsfördelning enligt kapitel 7.2.1-7.2.2

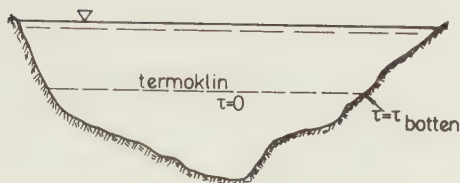


Fig. 7.8 I övergångszonen har språngskiktsskjuvkraften värde

Eftersom turbulensen dämpas vid språngskiktet behöver modeller, som tar hänsyn till skjuvkraften i diskontinuitetsytan mellan två skikt, inte vara bättre än en friktionsfri modell. Snarare kan man, eftersom strömmarna ofta är motriktade över resp. under termoklinen, förmoda motsatsen.

7.2.5 Glatt språngskikt

Tidigare har vid beräkningen av strömhastigheterna i epilimnion termoklinen antagits vara friktionsfri, men vid beräkningen av strömhastigheterna i hypolimnion har en viss friktionskraft förutsatts. Om skjuvkraften = 0 insätts som randvillkor i hypolimnionströmmingen, blir lösningen identisk med den för helt homogena vattenmassor. Differentialekvationen för strömfunktionerna kan lösas på grund av att rotation av gränsskjuvkraften får ett från noll skilt värde just i övergången från skiktade till icke skiktade vattenmassor, något som åskådliggöres i figur 7.8.

Strömmingen kommer nu helt och hållet att bestämmas av tryckgradienterna. Det betyder, att den aldrig kan vända och att den för kontinuitetens skull måste bli oregelbunden. Utan jordrotation blir hastighetsprofilen parabolisk. I det två-dimensionella fallet kan således ingen strömning uppkomma. Om hänsyn tas till jordens rotation blir strömmen icke så låst utan kan vrida med ökat djup. Eftersom ingen överförande skjuvkraft antages föreligga, så kan strömmarna under resp. över termoklinen glida fram helt oberoende av varandra.

7.2.6 Termoklinens lutning

Termoklinens lutning torde föga påverka strömsituationen i epilimnion, men om ingen överförande skjuvkraft finns i språngskiktet, så måste lutningen ha betydelse för strömförhållandena i hypolimnion. Beräkningsgången blir då: Strömfunktionerna för epilimnion bestämmas med ekvation (7.4) och för hypolimnion med ekvation (6.5). Termoklinen antages vara horisontell. Tryckgradienterna erhålles ur ekvationerna (3.20-21, 6.7). Termoklinens lutning blir bestämd enligt

$$\frac{\partial h_E}{\partial x} = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_H - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_E \right) / g (\rho_H - \rho_E) \quad (7.7)$$

Termoklinens nivå inpassas sedan så, att hypolimnionvattnets volym blir konstant. Med nya värden på språngskiktets djupet löses ekvation (7.4) och ekvation (6.5). Ur strömfunktionerna bestäms tryckgradienterna och från dessa termoklinens nivå. Sedan strömfunktioner och tryckgradientser ännu en gång bestämts löses strömhastigheterna ut ur ekvation (6.6) eller (6.8). Flödesschemat skisseras nedan.

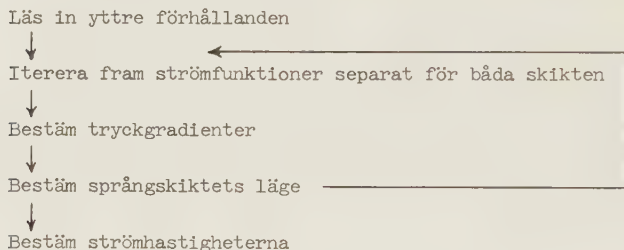


Fig. 7.9 Flödesschema för tvåskiktad modell

7.2.7 Simulerad strömning

En jämförelse av strömningen under olika förhållanden har gjorts i en sjö, som har ytan 10 x 10 km och maxdjupet 10 m. Vinden antages vara 4-5 m/s och virvelviskositeten 20 cm²/s.

Vid helt oskiktad sjö ger den teoretiska modellen i sjöns mitt ythastighetskomponenterna $u = 6,0$ cm/s och $v = 1,5$ cm/s, där u har samma riktning som vinden och v är riktad 90° höger vindriktningen. Strömmarna är något högre 1 km ut från den strand, som är parallell med vinden. Strömmen vänder på ungefär 3 m djup och når sitt maximala värde vid cirka 6-7 m djup.

Med ett språngskikt beläget på nivån 7,5 m blir strömningen likartad den för homogen sjö. Ytkomponenterna är emellertid maximala vid sjöns mitt ($u = 6$ cm/s, $v = 1,1$ cm/s). Strömmen vänder även nu på 3 m djup, och de maximala returströmmarna finns enligt förutsättningarna i språngskiktet.

Höjs språngskiktet till 5 m blir strömhastigheterna generellt lägre. Ythastighetskomponenterna i sjöns mitt blir $u = 4,1$ cm/s och $v = 0,3$ cm/s. Inverkan av jordens rotation blir således mycket mindre än tidigare.

Det är tämligen likgiltigt vilken av de båda ekvationerna (7.4), som används, ty den horisontella turbulensen visar sig ha mycket liten betydelse.

Bästa resultatet nås med en friktionskoefficient vid stranden av $k = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Högre värden ger för små strömmar längs stränderna, under det att lägre värden ger diskontinuiteter i övergången från oskiktad till skiktad modell.

Vid denna övergång vill gärna strömhastigheterna minska (t.ex. från 3,8 till 3,5 cm/s). Detta kan tänkas bero på, att friktionen i språngskiktet inte kan försummas. En speciell övergångszon sänker strömmarna i den oskiktade delen. Någon egentlig inverkan på hypolimnionströmmarna har övergångszonen endast, om språngskiktet ligger högt (2-3 m djup). Då är det diskutabelt, om språngskiktet någonstans kan räknas som friktionsfritt.

Strömmarna i hypolimnion blir i regel mycket små. Bortsett från själva språngskiktet blir de inte mer än ca 1 cm/s. Huruvida det är i överensstämmelse med verkliga förhållanden har inte verifierats. Om vindströmmarna i hypolimnion är så små, behöver de inte vara dominerande, utan strömmarna bestäms då även av inre seicher och eventuellt av temperaturförhållanden.

7.3 Skiktad modell applicerad på sjön Velen

7.3.1 Jämförelse mellan mätt och beräknad strömsituation

Strömningen i Velen den 22.6.71 har simulerats med hjälp av modellen med friktionsfritt språngskikt. Eftersom vinden var svagt sydlig med en liten västlig komponent valdes skjuvkraftskomponenterna 0,3 resp. 0,1 dyn/cm². Språngskiktet ansågs vara beläget på 6,5 m djup, se fig. 7.10. Eftersom vinden är svag, bör virvelviskositeten vara liten; 5 cm²/s valdes. Vid stränderna användes ett värde på horisontella friktionskoefficienten, som var $4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Detta gjorde det möjligt, att vid stränderna sätta ett extra lågt värde på virvelviskositeten.

Vattenytans nivåskillnad över sjön blev endast 4 mm. På 1,5 m nivå blev överensstämmelsen mellan modell och verklighet god. Strömningssmönstret i modellen stämde. Till och med virveln vid Näset och den vändande strömmen i söder visade sig i modellen. En viss liten friktion antogs föreligga i termoklinen. Detta medförde dock, att modellströmmarna i språngskiktet blev för höga, SSV 3 cm/s.

Modellprincipen enligt figur 7.8 med helt friktionsfritt språngskikt och en virvelviskositet av 100 cm²/s i gränsen mellan skiktade och oskiktade vattenmassor, dvs. där rörelsemängdutbytet antages ske, beskriver de uppmätta strömmarna. Strömmarna avbildas väl i södra delen av sjön. Nordströmmen är dock för stor. Vid Näset finns i modellen en svag virvel. Väster om ön avbildas den lokala sydgående strömmen riktigt. I norra mittbassängen går nordströmmen längs västra stranden. Även inom ett begränsat område i öster finns nordgående strömmar. Mellan dessa båda strömmar är hastigheterna små. Överensstämmelsen mellan modell och verklighet är således ganska bra. Den mycket starka strömmen längst i norr verkar emellertid orimlig. Beräknade och uppmätta strömbilder ses i figur 7.10. Det bör dock påpekas, att strömmarna är så inhomogena (eller eventuellt icke-stationära, eftersom ett mättingsförfarande enligt Lagrange har använts), att strömkorsmätningarna inte ger någon klar bild av strömningssmönstret.

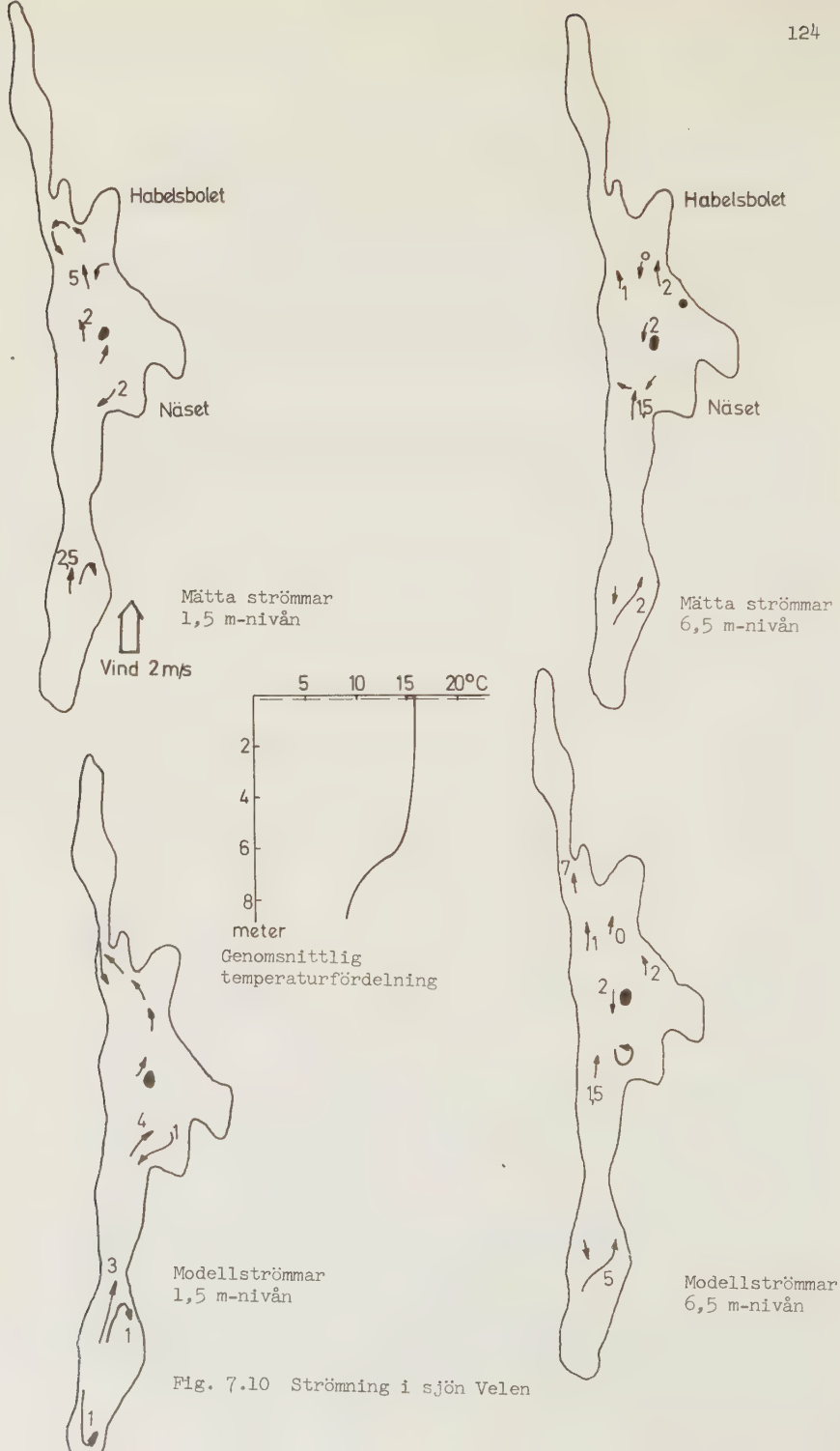


Fig. 7.10 Strömning i sjön Velen

7.3.2 Teoretisk strömsituation



Strömningen i Velen har simulerats med den skiktade modellen för att få en jämförelse med avsnitt 6.3.2. Vindstyrkan valdes emellertid något lägre, 8 7 m/s. Eftersom strömmarna inte kommer i kontakt med botten utan glider över den glatta termoklinen uppstår inga virvlar. Ytströmmarna blir små, 5 cm/s, och strömmarna vänder nära ytan. I termoklinen, som antagits belägen på 6 m djup, är strömmarna riktade åt söder med en för mittbassängen svag östlig komponent. Termoklinströmmarna är kraftigast i söder, 1,5 cm/s, och svänger där i vänstervarv. Strömmarna längs botten i sjöns djupdel är svaga, 0,3 cm/s, och riktade åt norr. En strömbild för 2 m nivå visas i figur 7.11. Siffrorna anger strömmarna i cm/s.

Fig. 7.11 Teoretisk strömbild på 2 m djup

7.3.3 Slutsatser om den skiktade modellen

En modell över strömningen i en sjö kan byggas upp med termoklinen som en friktionsfri yta. Epilimnionströmmarna beskrivs bra av modellen. Den långa tiden för att nå stationaritet i hypolimnion samt seichinverkan gör dock, att hypolimnionströmmarna inte avbildas bra i modellen.

Rörelsemängdstransport från övre till undre skiktet äger troligen endast rum just i övergången från homogena till skiktade vattenmassor. Endast med en modell där ett sådant antagande göres, stämmer strömmarna i hypolimnion överens i modell och verklighet.

Litteratur

1. Bengtsson, L. [1973]. Modellstudier av vindinducerad cirkulation - Dynamiska studier i sjön Velen, Report 29 (8), p. 77-99. Int. Hydrological Decade, Sweden.
2. Edenman, L. [1973]. Jämförande studie mellan observerade och ur temperaturdata beräknade hastigheter i södra delen av Velen - Dynamiska studier i sjön Velen, Report 29 (6.5), p. 60-67. Int. Hydrological Decade, Sweden.

Kapitel 8. ICKE-STATIONÄR STRÖMNING

8.1 Icke-linjär modell

- .1 Modellbeskrivning
- .2 Teoretiska resultat

8.2 Analytisk modell

- .1 Modellbeskrivning
- .2 Strömningssimulering
- .3 Förenklat antagande om bottenfriktion

Litteratur

Sammanfattning

En modell, i vilken strömhastigheterna beräknas analytiskt och en, i vilken de beräknas genom iteration, presenteras. Olika förhållanden simuleras. Accelerationsförloppet under inverkan av en viss vind styrs av sjöns djup samt av "turbulensen". Nästan omedelbart efter det vinden har blivit stationär, inställer sig vattenytan i det läge, som motsvarar dess fortvarighetstillstånd. Strömmarna uppnår inom någon timme sitt fortvarighetstillstånd.

- Figurer
- 8.1 Ytströmmens utveckling med tiden
Development of surface current
 - .2 Hastighetsprofilens utveckling med tiden
Development of velocity profile
 - .3 P.g.a. jordens rotation vrids ytströmmen efter hand
åt höger
Due to the rotation of the earth the surface current
turns to the right
 - .4 Flödesschema för transient modell
Flow chart of transient model
 - .5 Vattenytans och utströmmens ändring med tiden
The change with time of the declination of the water
surface and of the surface velocity
 - .6 Utdöende strömning
Decay of currents

- Tabeller
- 8.1 Relativ betydelse av olika termer
Relative importance of different terms
 - .2 Stationaritetstid för olika förhållanden
Time required to reach stationarity with different
situations

Ekvationer 8.1-5

Speciella beteckningar

n = heltal

8.1 Icke-linjär modell

8.1.1 Modellbeskrivning

För att kunna lösa rörelseekvationerna på formen (3.14-15) krävs iterationsberäkningar i tre dimensioner. Vid barotropiska förhållanden kan problemet genom införandet av strömfunktioner överföras på två-dimensionell form. Ekvation (3.24) skall lösas med den horisontella turbulensen på formen (3.25 eller .26). Värdet på strömfunktionerna fås genom iterationsberäkning. Då strömfunktionerna är kända kan tryckgradienterna beräknas och därefter genom ett nytt iterationsförfarande strömhastigheterna. Flödesschema framgår av figur 3.2. Strömfunktionerna beräknas för varje tidssteg, 1-2 minuter. Bottenfriktionen, som måste kännas, sättes lika en konstant ggr senast beräknade bottenhastighet. Strömhastigheterna beräknas för vart femte eller tionde tidssteg. Detta långa tidssteg kan med fördel varieras så, att tidssteget gradvis ökas, då stationaritet närmar sig.

Tryckgradienterna fås enligt ekvation (3.20-21). Strömhastigheterna beräknas med hjälp av rörelseekvationer (3.14-15) genom iteration i tre dimensioner, vilket är en mycket tidskrävande process. Fördelen är, att hänsyn kan tagas också till de icke-linjära termerna, och att virvelviskositeten kan varieras godtyckligt. Modellen kan även utnyttjas för att kontrollera andra mera analytiskt avancerade modeller. Modellen beskrivs mera i ett sammanhang av Lindh och Bengtsson [3]. Strömmarna i en sjö betecknas i detta kapitel som stationära, om $u(\infty) - u(t) < 0,5 \text{ cm/s}$ eller om $\partial u / \partial t < 10^{-4} \text{ cm/s}^2$.

8.1.2 Teoretiska resultat

På grund av den långa maskintiden har med iterationsmodellen endast ett fåtal körningar fortsatt intill dess, att stationärt tillstånd uppnåtts. Jämförelse med den stationära modellen kan dock göras. Man finner att för vattenmassor av storleksordningen $0,2 - 0,5 \text{ km}^3$ stationärt tillstånd uppnås efter ca tre timmar. Intill stränderna nås det stationära tillståndet redan inom loppet av en timme. Figur 8.1 visar ythastigheten mitt i en sjö som funktion av tiden. Hur hastighetsprofilen gradvis utvecklas framgår av figur 8.2. I detta fall är bottenfriktionen försummad, varför profilen vid botten blir tvår.

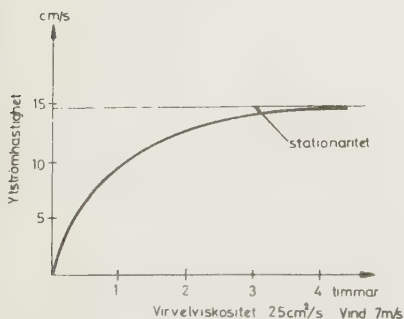


Fig. 8.1 Ytströmmens utveckling med tiden

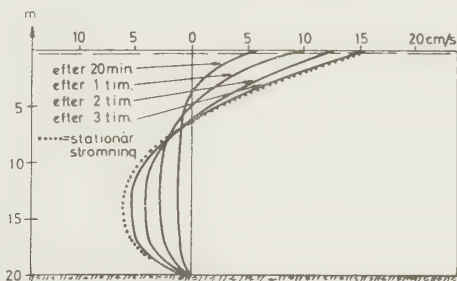


Fig. 8.2 Hastighetsprofilens utveckling med tiden

De olika termernas relativa betydelse i rörelseekvationerna har beräknats med iterationsmodellen, se tabell 8.1. Tryckgradientens inverkan har satts till 1. Värden gäller på 1 m djup i en sjö av storleken 2,5 x 5 km med maxdjupet 20 m.

Tabell 8.1 Relativ betydelse av rörelseekvationens olika termer

	I centrum av sjön		Vid stranden	
	efter 20 min	efter 2 tim	efter 20 min	efter 2 tim
Tryckgradient	1	1	1	1
Vertikal turbulens	3	2	1	0,5
Horisontell turbulens	-	-	-	0,1
Coriolisacc.	0,03	1	-	0,2
Rel acc.	5	1	2	0,1
Fältacc.	-	-	-	0,1

Då stationärt tillstånd närmar sig minskar naturligtvis inverkan av tidsderivatan samtidigt som jordrotationen får ökad betydelse. Såväl horisontell turbulens som fältaccelerationer kan försummas. Hur ytströmmen efter hand vrids framgår av figur 8.3. Vridningen blir mindre, om bottenfriktionen är större.

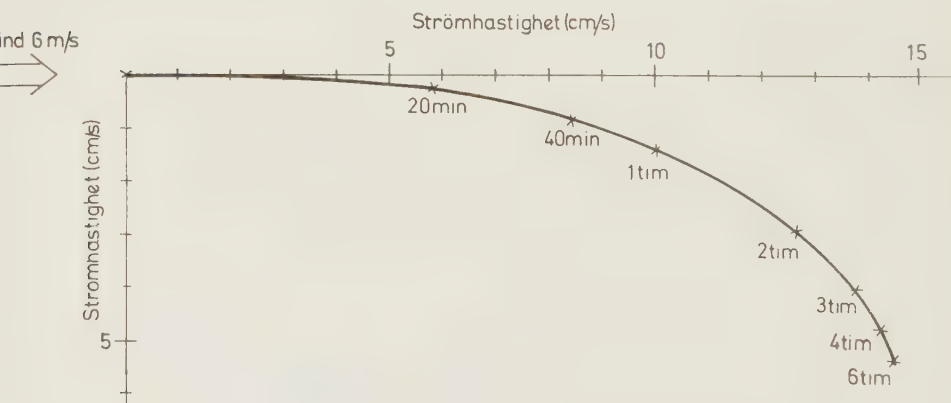


Fig. 8.3 P.g.a. jordens rotation vrids ytströmmen efter hand åt höger

Om modellen kan sägas, att den är alltför ohanterlig att generellt arbeta med, eftersom iterationsförfarande sker i tre dimensioner. Den bör användas endast för att få ett begrepp om erforderlig tid för att uppnå stationärt tillstånd samt för kontroll av någon analytiskt mera avancerad modell.

8.2 Analytisk modell

8.2.1 Modellbeskrivning

Förutsättes tryckgradienterna samt vertikala virvelviskositeten vara konstanta under ett visst kort tidsintervall, så kan strömmarna lösas med hjälp av Fourier-serier eller transformationer. Ur strömfunktionerna bestäms medelvärdet av tryckgradienterna under ett tidsintervall. Då strömmarna bestäms med Fourier-serier kan hänsyn till jordrotationen inte tagas. Med transformationer är detta emellertid möjligt. Laplacetransformer kräver mindre kärnminne än Fouriertransformer. För en homogen sjö ger Fourier-serier lösningen

$$u(z,t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \{ g_3(z) + f_3(z,t) \} + \frac{1}{\rho} \{ g_4(z) + f_4(z,t) \} + f_0(z,t) \quad (8.1)$$

med g -funktioner enligt ekvation (6.8) och där f -funktionerna beror av djupet, virvelviskositeten samt den horisontella friktionskoefficienten. f_0 beror dessutom av strömförhållandena vid intervalllets början.

$$f_4(z,t) = -\frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} y_n c_n / a_n$$

$$f_3(z,t) = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1+2n)} \frac{y_n c_n}{a_n}$$

$$f_0(z,t) = \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-h}^0 u(z,0) c_n dz y_n c_n$$

med $c_n = \cos\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi z}{h}\right)$; $y_n = \exp(-t a_n)$

$$a_n = k + \pi^2 v(1+2n)^2 / 4 h^2$$

Iterationsschemat för en modell med Fourier-serier blir enligt figur 3.2, men iteration behöver endast företagas vid beräkning av strömfunktionerna. Strömfunktionerna bestäms således ur ekvation (3.24), tryckgradienterna ur ekvationerna (3.20-21) och bottenfriktionen ur hastighetsgradienten vid botten i det föregående tidssteget. Beräkningsgången åskådliggöres tydligare av figur 8.4.

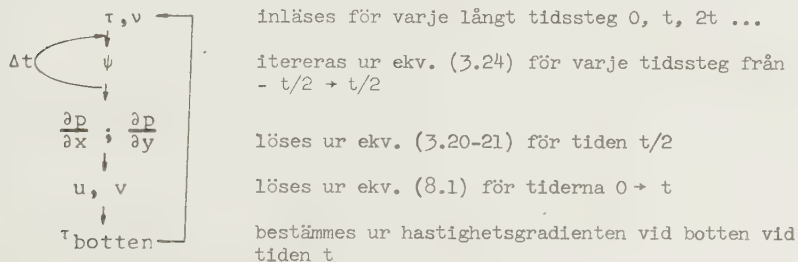


Fig. 8.4 Flödesschema för transient modell

Derivering av ekvation (8.1) ger bottenfriktionen

$$\tau_B = \frac{\partial p}{\partial x} f_1 + \tau \cdot f_2 + f_{00} \quad (8.2)$$

$$f_1 = \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha h) + \frac{v}{h} \sum_{n=0}^{\infty} 2/a_n$$

$$f_2 = \exp(\alpha h) (1 - \tanh(\alpha h)) - \frac{v}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / \pi(1+2n) a_n$$

$$f_{00} = \rho \pi h^{-2} v \sum_{n=0}^{\infty} S_n (-1)^n (1+2n) y_n$$

S_n = integraluttrycket i f_0 ; α = enligt kapitel 6.1.3.

Vill man ta med alla termer med minst 3 %:s inverkan räcker det, att för ekvation (8.1) utsträcka summationen till tre termer. Vid beräkning av bottenfriktionen har $f_{00}(n)$ dock högt värde både för $n = 3$, 4 och 5. S_n skiftar emellertid tecken, och termerna tar därför efter hand ut varandra. S_3 , S_4 och S_5 approximeras för att spara kärnminne med respektive

$$S_n = S_n^x \cdot S_2 / S_2^x$$

där med x markerat integraluttryck har beräknats ur den enkla hastighetsprofilen enligt ekvation (6.2).

Hänsyn kan tas till jordrotationen genom att med hjälp av en cosinus-transformation eliminera z -beroendet. På komplex form får strömhastigheterna lösningen

$$u(z, t) = \frac{p}{\rho} f_{3r}(z, t) + \tau f_{4r}(z, t) + f_{0r}(z, t) \quad (8.3)$$

med

$$f_{4r}(z, t) = - \frac{2}{h\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (y_{nr} - 1) c_n / a_{nr}$$

$$f_{3r}(z, t) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1+2n)} \frac{(y_{nr} - 1) \cdot c_n}{a_{nr}}$$

$$f_{0r}(z, t) = f_0(z, t) \text{ men med } y_n \rightarrow y_{nr}$$

$$y_{nr} = \exp(-t a_{nr}); \quad a_{nr} = a_n + i f$$

$$u = u + i v; \quad \tau = \tau_x + i \tau_y; \quad p = \partial p / \partial x + i \partial p / \partial y$$

Om tryckgradienterna är konstanta, kan med t.ex. Laplacetransformation tidsberoendet elimineras. Krauss [2] använder sig av denna metod men med helt friktionsfri botten. Här införes i stället randvillkoret $u = 0$ vid botten, varvid strömhastigheterna på komplex form får transformationslösningen

$$\hat{u}(z, s) = u_0(z) / a + p/\rho s a \{ \cosh(\lambda z) / \cosh(\lambda h) - 1 \} \\ + \sinh(\lambda z + \lambda h) / \cosh(\lambda h) + \tau(if + k) / \rho v \lambda a s$$

med $\lambda = (a/v)^{\frac{1}{2}}$; $a = s + if + k$ och index 0 för $t = 0$.

En invers transformation ger med komplexa termer

$$u(z, t) = u(z, 0) y_r + \frac{p}{\rho} f_{2r}(z, t) + \tau f_{41}(z, t) \quad (8.4)$$

med

$$f_{41}(z, t) = -\frac{2}{h\rho} \sum_{n=0}^{\infty} c_n / a_{nr} \cdot \{ y_r \left(1 + (1 - y_{no}) a_r / a_{no} \right) - 1 \}$$

där $a_{no} = a_n - k$; $a_r = if + k$; $y_{no} = \exp(-a_{no} t)$; $y_r = \exp(-a_r t)$

Eftersom tryckgradienterna inte är konstanta, är lösningen naturligtvis endast en approximation.

S.2.2 Strömningssimulering

En simulering av strömmar med hjälp av den analytiska modellen visas i figur 8.5. Sjön är 9 m djup och har arean 150 km². Ur figuren ses hur vattenytan nästan omedelbart ställer in sig efter vinden. Strömmen reagerar något långsammare, men även den uppnår ganska snabbt sitt slutliga värde. Då det stationära tillståndet i det närmaste uppnåtts, överföres i mycket små mängder ytvatten från mitten av sjön mot stränderna samtidigt som returströmmarna närmast intill stränderna försvinner. För att denna transport inte skall bli för stor, och för att strömmarnas acceleration skall kunna dämpas, måste den horisontella turbulensen tagas i beaktande. Friktionskoefficienten åsättes ett högt värde invid stränderna och ett lågt eller försummas helt mitt uti i själva sjön.

För att anpassa sig till fortvarighetstillståndet behöver strömmarna vid en viss lutning av vattenytan tiden

$$t \sim 1/(k + \frac{2.5v}{h^2}) \cdot (\ln \tau/ph + \text{konst.})$$

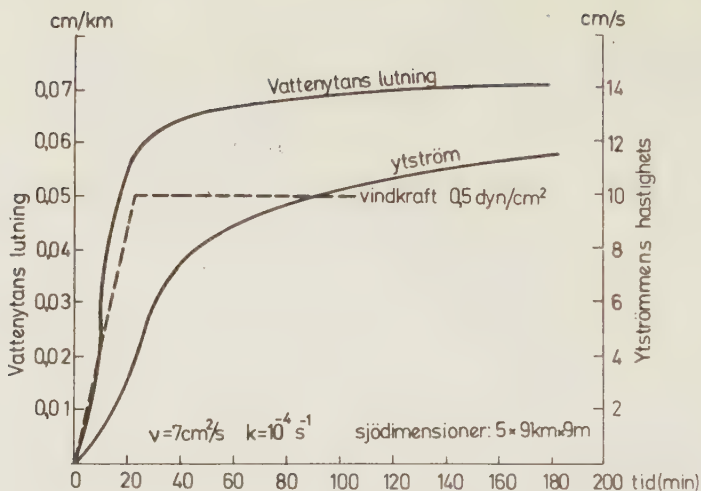


Fig. 8.5 Vattenytans och ytströmmens ändring med tiden

Eftersom skjuvkraften och tryckgradienten verkar i olika riktningar, når dock sjön sitt fortvarighetstillstånd tidigare. Vid stark vind blir tiden för att nå stationärt tillstånd omvänt proportionell mot djupet. I en stor sjö minskar friktionskoefficienten och därför behövs längre tid för att nå stationaritet i en stor än i en liten sjö.

Stationaritetstiden kan bero på vindstyrkan, sjöns djup och area, virvelviskositeten, friktionskoefficienten och tyngdaccelerationen. Genom att variera parametrarna kan man se, att endast turbulensen, sjödjupet och något vinden påverkar stationaritetstiden. Vinden och sjöns storlek verkar indirekt genom att de bestämmer turbulensen. Om virvelviskositeten ändras från $10 \text{ cm}^2/\text{s}$ till 20 resp. $60 \text{ cm}^2/\text{s}$, så minskar stationaritetstiden från 90 min till 50 resp. 40 min. Om horisontella friktionskoefficienten ökar från $1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ till $5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, så minskar stationaritetstiden från 160 min till 60 min. En ändring av maximidjupet från det i exemplet ovan använda 10 m till 20 m medför en ökning av stationaritetstiden från 1 tim till 3 tim. Några resultat från simuleringar, i vilka virvelviskositeten har fått variera enligt ekvation (6.9) och friktionskoefficienten öka med minskad sjöstorlek, redovisas nedan.

Tabell 8.2 Stationaritetstid för olika förhållanden

Vind m/s	djup m	area km	friktion s^{-1}	tid tim
10	10	2 x 4	5×10^{-4}	1 1/4
7	10	2 x 4	5×10^{-4}	3/4
7	10	10 x 20	1×10^{-4}	2
10	10	10 x 20	1×10^{-4}	2 1/2
10	20	3 x 5	1×10^{-4}	4

Turbulensen måste ändra sin karaktär under ett icke-stationärt förlopp. Hur lång tid dröjer det innan turbulensen utvecklar sin fulla styrka? Hur snabbt avtager virvelviskositeten sedan vinden slutat blåsa? Hur ändras den horisontella friktionskoefficienten? Detta är problem, som gör den icke-stationära modellen mycket osäker. I exemplet enligt figur 8.6 har virvelviskositeten fått dö ut med vinden. Någon fri svängning av vattenmassorna uppstår inte, utan strömmarna avtar fullständigt.

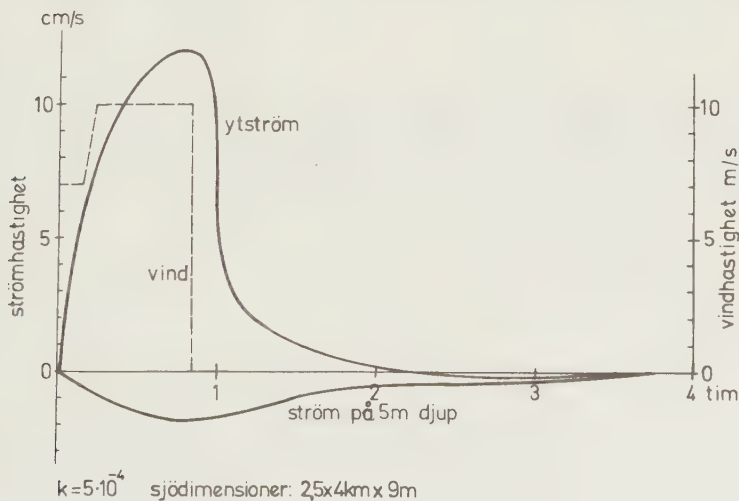


Fig. 8.6 Utdöende strömning

8.2.3 Förenklat antagande om bottenfriktion

Om endast vattenytans läge söks, är det onödigt att beräkna alla strömmarna. Då måste man antaga, att bottenfriktionen är proportionell mot det totala flöde, som passerar mellan två punkter. Detta medför emellertid, att en stark bottenström - som helt kompenseras av en stark ytström - inte ger någon som helst bottenfriktion.

I de båda i avsnitten 8.1 och 8.2 beskrivna modellerna kan bottenfriktionen beräknas exakt, eftersom strömprofilen vid botten framräknas. Emellertid måste bottenfriktionen ett tidssteg tillbaka användas.

Virvelviskositetsfördelningen är inte konstant genom en hel vertikal, utan virvelviskositeten minskar vid botten. I en djup sjö bör därför ett lägre virvelviskositetsvärde användas vid beräkningen av bottenfriktionen. Modellresultaten tyder på, att för de allra djupaste delarna av en sjö kan bottenfriktionen helt försummas. Därvid försvinner den tidigare omnämnda svaga transporten av ytvatten mot stränderna, och bottenströmmarna blir kraftigare. Starka kustströmmar försvinner.

Mosby 4,5 har utanför Norges kust uppmätt logaritmisk hastighetsfördelning vid botten. Den logaritmiska hastighetsfördelningen är välbekant också för kanalströmning. Bottenskvkraften kan då beräknas på samma sätt som vindskjuvkraften med en koefficient c ,

$$\tau_B = -c \cdot \rho \cdot u^2 \quad (8.5)$$

Problemet är emellertid att bestämma strömhastigheten, u . Eftersom u kan väljas helt fel, är det troligen bättre att försumma bottenfriktionen än att använda formeln ovan. Söker man däremot avbilda fria svängningar i vattenmassan, så kan formeln ovan användas med u lika med U/h . Koefficienten c är av storleksordningen 10^{-3} .

Litteratur

1. Crease, J. [1962]. Velocity measurements in the deep water of the western north Atlantic. - J. Geoph. Res. 67 (8), p. 3173-3176.
2. Krauss, W. [1972]. Wind-generated internal waves and inertial period motions. - Int. Symp. on Stratified flows, Novosibirsk.
3. Lindh, G. och Bengtsson, L. [1971]. Wind-induced circulation in a lake. - 1:st Int. Conf. on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions, Trondheim, p. 893-908.
4. Mosby, R.M. [1946]. Experiments on turbulence and friction near the bottom of the sea. - Bergens Museums årbok, naturvetenskap 3, p. 1-6.
5. Mosby, R.M. [1949]. Experiments on bottom friction. - Univ. Bergens årbok, naturvetenskap 19, p. 1-12.

Kapitel 9. SEICHSTRÖMMAR

9.1 Teori

9.2 Observerade svängningar

- .1 Seichströmmar i hypolimnion
- .2 Seichströmmar i termoklinen
- .3 Tvingad svängning

Litteratur

Sammanfattning

Strömmar upp till någon cm/s kan orsakas av inre svängningar. Seichströmmar inom termoklinen har observerats. I regel krävs en periodicitet hos vinden, för att sjön Velens vattenmassa skall svänga.

- Figurer 9.1 Termoklinens svängning i norra (R) och södra (S) Velen
 Oscillation of the thermocline in northern (R) and southern (S) Lake Velen
- .2 12° och 14° -isotermernas svängning samt avståndet mellan dem i sektion R
 Oscillation of the 12° - and 14° - isotherms and the distance between them in section R
 - .3 Seichströmmarnas riktning 5/6 1970
 Directions of seiche currents 5/6 1970
 - .4 10° -isotermens svängning i södra Velen
 Oscillation of the 10° -isotherm in southern Lake Velen
 - .5 Termoklinens svängning i Velen 29/6 - 3/7 1971
 Oscillation of the thermocline in Lake Velen 29/6 - 3/7 1971
 - .6 Isothermer i Velen 1 - 2/9 1971
 Isotherms in Lake Velen 1 - 2/9 1971

Tabeller -

Ekvationer 9.1-2

Speciella beteckningar

A = vågamplitud
 c = våghastighet
 E = som index: epilimnion
 g' = densimetrisk tyngdacceleration
 H = som index: hypolimnion
 L = bassänglängd
 n = modnummer
 T = svängningstid

9.1 Teori

Strömningsbilden i en sjö bestäms till viss del av seichströmmar, vilka är en följd av omlagringen av vatten i samband med stående svängningar. Då vinden blåser över en sjö, snedställs vattenytan. Termoklinen snedställs i motsatt riktning och mycket brantare. Vid upphörande vind strävar vattnet efter att återgå till jämviktsläget, varvid stående svängningar uppkommer i vattenmassan. Vattnet mellan max- och min-nivån förflyttas därvid över hela sjön under en halv svängningsperiod.

Med kännedom om amplituderna (A) för de stående vågorna kan de uppkomna seichströmmarna beräknas. Vattenmassan $A \cdot 2L/\pi$ skall på tiden $T/2$ pressa sig fram över djupet h. Strömmarna blir därvid

$$u = \frac{4}{\pi} \frac{A}{h} \frac{L}{T} = \frac{2 \cdot n \cdot A}{\pi \cdot h} \cdot c \quad (9.1)$$

där L = avståndet över vilket vågen svänger, T = svängningstiden, n = modens nummer, c = våghastigheten.

Yttsvängningarna har stor våghastighet men så liten amplitud, att seichströmmarna blir små. Den inre vågens hastighet c blir mindre.

$$c = \left(\frac{g'}{\frac{1}{h_E} + \frac{1}{h_H}} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad g' = g \frac{\rho_H - \rho_E}{\rho} \quad (9.2)$$

Däremot blir den inre vågens amplitud mycket större än den yttres, varför denna inre våg kan ge upphov till strömmar av viss styrka.

9.2 Observerade svängningar

9.2.1 Seichströmmar i hypolimnion

De inre vågorna är under sommaren mycket markerade i sjön Velen. De har en observerad period på 20 timmar och en amplitud av ca 1/2 m. Om sprängskiktet ligger på 5 m nivå är avståndet mellan väggarna (avståndet över vilket vågen svänger) 4 km och hypolimnions medeldjup 4 m. Detta ger i såväl övre som undre skiktet strömhastigheten 0,6 cm/s, vilket är tillräckligt lågt för att försummas i övre skiktet, men kan ha betydelse i undre skiktet.

Svängningar i termoklinen, belägen på 7 m djup den 5 juni 1970, visas i figur 9.1. Svängningsperioden är nära 1 dygn. I vertikal R är amplituden 1,5 m, vilket motsvarar en ytändring av 570 m² och den genomsnittliga arean av hypolimnion är 510 m². I vertikal S är amplituden större, 2 m, motsvarande ytändringen 900 m², och den genomsnittliga arean av hypolimnion är 420 m². I vertikal A sker svängningarna på samma sätt som i R, men amplituden är mindre.

Svängningarna sker kring en punkt 750 m söder om A, och avståndet mellan väggarna är nära 4 km. Amplituden vid ändpunkterna är ca 2 m. Vågens hastighet är 9 cm/s, vilket kan jämföras med den teoretiska, som är 12 cm/s enligt ekv. (9.2) med $h_E = 7$ m, $h_H = 3$ m, $\Delta\rho/\rho = 0,7 \cdot 10^{-3}$.

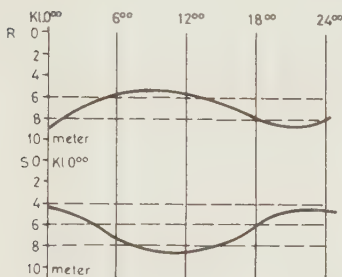


Fig. 9.1 Termoklinens svängning i norra (R) och södra (S) Velen

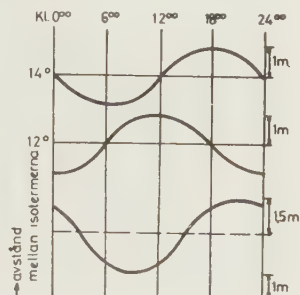


Fig. 9.2 12° och 14°-isotermernas svängningar samt avståndet mellan dem i sektion R

Då vågen skrider fram ändras vattenmassornas läge. Den största vattenvolymen passerar svängningscentrat. Här är emellertid hypolimnions yta så stor, att strömmarna inte blir stora. I stället studeras ett snitt genom vertikal S, där hypolimnions yta är liten. Volymen, som skall passera snittet är ca 320.000 m³. Detta ger en strömhastighet i hypolimnion av 1,8 cm/s. Det är tydligt, att om sprängskiktet ligger lågt, så kan ganska kraftiga seichströmmar uppkomma nära ändpunkterna. En förträngning av sektionen kan ge upphov till verkligt starka seichströmmar.

9.2.2 Seichströmmar i termoklinen

Motsvarande dag (5 juni 1970) studeras 12°- resp. 14°-isotermen. 12°-isotermen svänger precis i takt med 10°-isotermen (sprängskiktets rörelse). 14°-isotermen är emellertid fasförskjutet T/4, men svängningstiden för denna isoterm är ändå knappt 1 dygn. 14°-isotermen svänger mellan 4,5 och 2,5 m medan 12°-isotermen svänger mellan 6 och 4 m. Figur 9.2 visar 14°- resp. 12°-isotermen i vertikal R. Den undre kurvan visar avståndet mellan isotermerna. Sjöns djup tillåter svängningar över en längd av 4 km.

För enkelhetens skull tänkes den berörda delen av sjön (djupen mellan 2,5 och 6 m) kunna representeras av en parallelepiped. Amplituderna i R är för båda isotermerna 1 m. Detta gör, att amplituden vid "väggarna" blir 1,1 m. Man kan alltså låta R representera en "vägg". Den undre kurvan i figur 9.2 visar att $2 \cdot 1,5 \cdot \frac{4000}{\pi}$ m² vatten skall pressas genom ett vattendjup av (1 + 1,5)m under en halv svängningsperiod. Därvid uppkommer i detta skikt en ström av 3 cm/s. Under förmiddagen går strömmen mot söder och under eftermiddagen mot norr.

Strömningsriktningarna i epilimnion, termoklinen resp. hypolimnion visas för varje 3-timmars period i figur 9.3. Dubbel pil anger att strömmingen är kraftig. Man ser, att strömmarna i de olika skikten glider oberoende förbi varandra. Det är således rimligt att räkna med tre lager, som glider friktionsfritt över varandra.

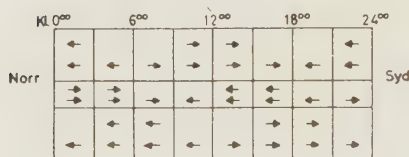


Fig. 9.3 Seichströmmarnas riktning 5/6 -70

Som figur 9.4 visar, så fortsätter termoklinen att svänga under den 6 och 7 juni. Den observerade perioden, nära ett dygn, antyder att svängningarna kan bero på en dygnsperiodicitet hos vinden. Vinden förstärker svängningarna den 5/6, men någon periodicitet hos vinden finns i varje fall inte under de efterföljande två dagarna. Svängningen kan betraktas som fri.

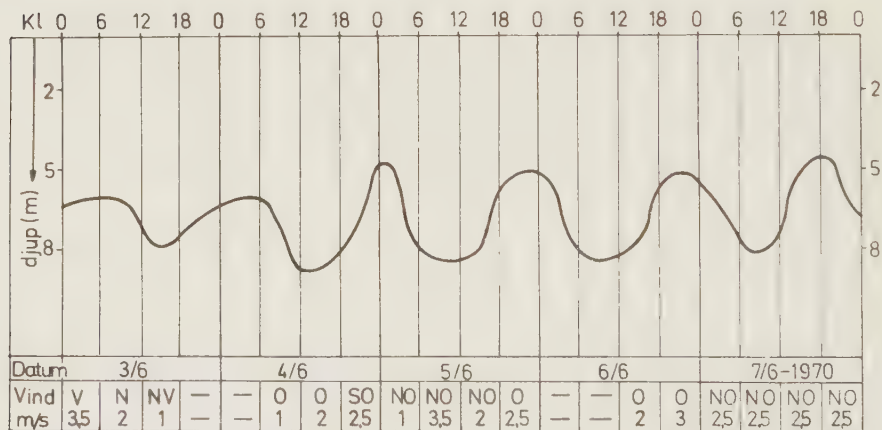


Fig. 9.4 10°-isotermens svängning i södra Velen

Seichströmmarna kan således bli av storleksordningen någon cm/s. Störst blir de vid en förträngning av sektionsarean. Vid svagt utbildat språngskikt kan termoklinens övre och undre yta svänga något olika och därvid ge upphov till strömmar inom termoklinen.

9.2.3 Tvingad svängning

10° isotermens svängning i mätvertikalerna S, söder, och R, nästan i norr, i Velen under tiden 29/6 - 3/7 1971 visas i figur 9.5. Under den 29/6 och på förmiddagen den 30/6 finns kvar en dämpad svängning efter en kortvarig sydlig vind. På eftermiddagen den 30/6 pressar en stark nordlig vind ner termoklinen i söder. När vinden på kvällen avtar, börjar termoklinen svänga. Tre dämpade svängningar med den förväntade perioden 20 timmar kan ses. Vinden samverkar emellertid med de naturliga svängningarna. Vinden avtar under natten, och dess styrka under dagarna blir allt svagare. Den 3/7 samverkar inte längre vinden och svängningarna. Perioden blir under denna svängning längre. Svängningarna tvingas att anpassa sig efter vinden.

I regel krävs en periodicitet hos vinden för att termoklinen skall kunna svänga. Figur 9.6 visar hur en svängning direkt utsläcks. 10° , 12° , 14° och 16° isotermerna i vertikal R i Velen är ritade mot tiden. Den 1/9 pressar den sydliga vinden ner termoklinen i norr. När vinden avtar går termoklinen tillbaka utan att svänga. Den snabba utsläckningen kan bero på närheten till botten.

Litteratur

1. Bengtsson, L. och Eriksson, E. [1973]. Water movements and seiches. - Lake Velen project 7, Int. Hydr. Decade, Sweden.
2. Hellström, B. [1963]. Seiches and wind currents in lakes. - Bull. No 62. Inst. Hydraulics Royal Inst. of Technology, Stockholm.
3. Lick, W. [1970]. Non-linear wave propagation in fluids. - Annual Review of Fluid Mech. 2, p. 113-136.
4. Platzman, G.W. [1965]. The daily variation of wind set-up on Lake Erie. - Proc. 8:th Conf. Great Lakes Res., p. 273-277.
5. Rumer, R.R. [1971]. Internal seiches and interfacial mixing in stratified lakes. - Tech. Memo. No 71-3. W.M. Keck Laboratory, California Inst. of Technology.

Kapitel 10. TERMOKLINEN

10.1 Uppbyggnad av språngskikt

10.2 Termoklinens nedträngning

.1 Teori

.2 Fältmätningar

10.3 Termoklinens nedbrytning

Litteratur

Sammanfattning

Sedan termoklinen väl utbildats beror dess nedträngning av den från vinden till sjön överförda rörelseenergin. Om man antar, att en del av denna rörelseenergi omvandlas till potentiell energi kan en nedträngningshastighet beräknas. Beräknad och observerad nedträngning stämmer väl överens.

Termoklinens nedbrytning i Velen under några höstar har studerats. Nedbrytningen sker för relativt svaga vindar, om temperaturdifferensen över termoklinen understiger 6°C .

- Figurer 10.1 Temperaturfördelning vid a) kontinuerlig uppvärmning av vattenytan, b) under samtidig vindinverkan, c) efter nattens ytavkylning
 Temperature distribution a) when the water surface is continuously heated, b) when also a wind exists, c) after the cooling of the surface in the night
- .2 Termoklinens nedträngning ökar systemets potentiella energi
 The entrainment of the thermocline increases the potential energy of the system
- .3 Temperaturfördelning 16 - 23/9 -69
 Temperature distribution 16 - 23/9 1969

- Tabeller 10.1 Konstantbestämning ur termoklinens nedträngning 1970
 Determination of constants from the entrainment of the thermocline in 1970
- .2 Beräknat och verkligt språngskiktsdjup 1971
 Calculated and observed depth of the thermocline in 1971
- .3 Blåsiga dagar under 1969-70-71
 Windy days in 1969-70-71

Ekvationer 10.1-2

Speciella beteckningar

- A = sjöyta
 E = energi per ytenhet
 E = som index: epilimnion
 F_d = densimetriskt Froudetal
 h = språngskiktsdjup
 H = som index: hypolimnion
 ΔT = temperaturdifferens mellan epilimnion och hypolimnion
 V_E = epilimnions volym
 W_e = nedträngningshastighet
 α = termisk expansionskoefficient för vatten $\approx 0,18 \times 10^{-3} (^{\circ}\text{C})^{-1}$
 δ = nedträngningsavstånd

10.1 Uppbyggnad av språngskikt

Kontinuerlig upphettning av en vattenyta ger en med djupet ständigt avtagande temperatur, figur 10.1a. Om upphettning sker under vindinverkan, blir skiktet närmast ytan omblandat, figur 10.1b. Ytavkylningen under natten ger upphov till konvektionsströmmar. Den i ytan bildade "kylan" tränger ner och ett termiskt homogent skikt bildas, figur 10.1c.

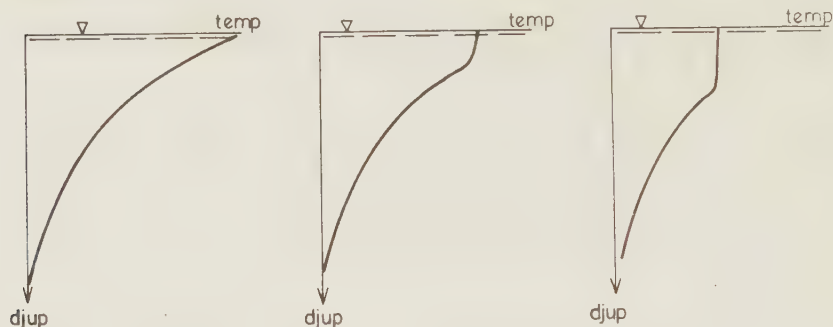


Fig. 10.1 Temperaturfördelning vid a) kontinuerlig upphettning av vattenytan, b) under samtidig vindinverkan, c) efter nattens ytavkylning

Den uppkomna skarpa densitetsgradienten, termoklinen, bildar en viss diffusionsspärr, vilken ökar densitetsgradienten, varvid spärren mot diffusion blir effektivare osv. tills det slutligen existerar två nästan homogena vattenmassor åtskilda av en diskontinuitetsyta.

Ett språngskikt byggs i princip upp enligt beskrivningen ovan. I Velen utbildas språngskiktet 1970 och 1971 under 14 dagar i maj månad. Under cirka en vecka höjs temperaturen från 4°C till 6°C. Under näst följande vecka utbildas språngskiktet med ett hypolimnionvatten med temperaturen 7,5°C och ett epilimnionvatten med temperaturen 12°C. Vindförhållandena är enhetliga alla fyra veckorna.

Hittills har inte någon teoretiskt korrekt behandlat termoklinens uppbyggnad.

10.2 Termoklinens nedträngning

10.2.1 Teori

Sedan termoklinen väl utbildats kommer den att verka som en diffusionsspärr. Det övre vattenskiktets strömmar kan emellertid dra till sig en del av den underliggande vattenmassan (entrainment). Termoklinen kommer därvid att sakta röra sig nedåt (thermocline erosion).

En sjös vattenmassor tillföres mekanisk energi från vinden. Energin fördelar sig på vågorna och på själva strömmen. Huvuddelen av ström-

mens energi dissiperar till värme. En liten del av den kinetiska energin kan bli över till en nedträngning av språngskiktet och öka systemets potentiella energi. Nedträngningsenergin bör med hjälp av kapitel 4 vara

$$E(\text{ned}) \sim \tau \cdot W \cdot t = \text{konst} \cdot C_D^{3/2} \rho_{\text{air}}^{3/2} \rho^{-1/2} W^3 \cdot t$$

där E betecknar energi per ytenhet. t = tiden, under vilken vinden verkar. W är som tidigare vindhastigheten.

En nedträngning av språngskiktet utan yttre värmetillförsel enligt figur 10.2 medför en ökning av systemets potentiella energi. Ökningen blir, om tillståndsekvationen utnyttjas på formen

$$\Delta \rho = \rho \alpha \Delta T \quad (10.1)$$

$$\Delta E(\text{pot}) = g \Delta \rho h \delta / 2$$

där $\Delta \rho = \rho_H - \rho_E$; $\Delta T = T_E - T_H$; ΔE = energi per ytenhet

α = termisk expansionskoefficient; h = språngskiktsnivån,

δ = termoklinens nedträngning,

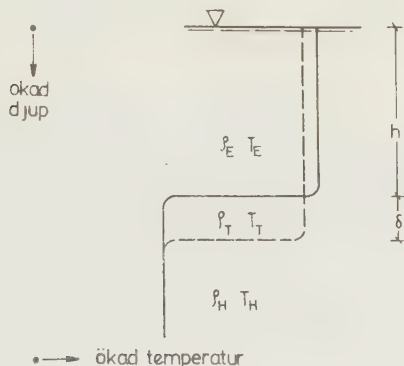


Fig. 10.2 Termoklinens nedträngning ökar systemets potentiella energi.

Genom att sätta energiuttrycken lika kan en nedträngningshastighet, W_e , beräknas. Denna blir

$$W_e = \text{konst} \cdot 2 \cdot C_D^{3/2} \rho_{\text{air}}^{3/2} W^3 / (gh \Delta \rho \cdot \rho^{1/2}) \quad (10.2)$$

Om hänsyn toges till sjöns oregelbundenhet, byts $\Delta \rho$ mot

$$(\rho_H A_T - \rho_E V_E / h) / A$$

där

A_T = termoklinens yta, A = sjöns yta, V_E = epilimnions volym.

Genom värmeutbyte med atmosfären kan epilimnion återfå sin ursprungliga temperatur.

10.2.2 Fältmätningar

Ur de kontinuerliga temperaturmätningarna i sjön Velen kan man utläsa termoklinens rörelser. För att bestämma konstanten i ekvation (10.2) har hela sommarperioden 1970 studerats. Släpkräftskoefficienten har antagits vara $1,1 \cdot 10^{-3}$. Överstruken term i tabellen nedan anger medelvärde.

Tabell 10.1 Konstantbestämning ur termoklinens nedträngning 1970

Period	15- 24.6	25- 28.6	28- 30.6	1- 9.7	10- 14.7	15- 20.7	21- 24.7	25- 31.7	1- 15.8	16.8- 1.9
h (m)	4,0 - -4,25	-4,75	-5,0	-5,75	-6,25	-6,5	-7,35	-7,40	-7,50	-7,70
ΔT (°C)	7-14	-10	10	-9	-8	8	8	8	8	8
$\overline{W^3}$ (m/s) ³	29	84	40	115	230	33	540	30	20	70
δ m	0,25	0,50	0,25	0,75	0,50	0,25	0,85	0,05	0,10	0,20
konst	0,20	0,40	0,57	0,22	0,18	0,17	0,17	0,10	0,20	0,09

Konstantens medelvärde över hela perioden är 0,21. Sista veckan i juni är termoklinens nedträngning mer eller mindre skenbar, eftersom nedkylning av epilimnion minskar termoklinens utbredning. Detta är en form av nedträngning, som liknar den nedbrytningsprocess, som äger rum vid höstavkylningen. Undantages denna period får konstanten medelvärdet 0,17. Värdet gäller för Velen eller liknande sjöar.

Ekvation (10.2) med nedträngningskonstanten 0,17 appliceras på 1971 års mätdata för sjön Velen. Språngskiktet är väl utbildat den 15 juni. Temperaturdifferensen mellan epilimnion och hypolimnion är 8°C. Temperaturdifferensen antages vara konstant under hela sommarperioden. Efter den 27 augusti sker en kraftig nedkylning av sjön. Termoklinen har under sommarperioden sjunkit 2 m. Observerat (obs) och beräknat (ber) språngskikt kan jämföras i tabell 10.2. Angivna djup gäller vid början av en period.

Tabell 10.2 Beräknat och verkligt språngskiktsdjup 1971

Period		15-30.6	1-15.7	16-31.7	1-15.8	15-27.8	27.8
h(obs) (m)		5,0	saknas	6,0	6,5	6,9	7,2
h(ber) (m)		-	5,75	6,2	6,55	7,0	7,2
$\overline{W^3}$ (m/s) ³		78	58	38	74	38	-
δ (ber) (m)		0,75	0,45	0,35	0,45	0,2	-

Det går således väl att beräkna språngskiktets rörelse med hjälp av ekvation (10.2).

10.3 Termoklinens nedbrytning

Den kraftiga ytavkylningen under hösten ger upphov till konvektionsströmmar i epilimnion, vars temperatur gradvis sjunker. Temperaturdifferensen mellan epilimnion och hypolimnion minskar tills skiktningen blir så svag, att den genom vindens inverkan bryts ned. Förloppet klargörs av figur 10.3, som visar temperaturfördelningen i Velen under olika dagar. Bit för bit av temperaturkurvan "skärs av" fram till dess nedbrytningen sker 22-23 sept.

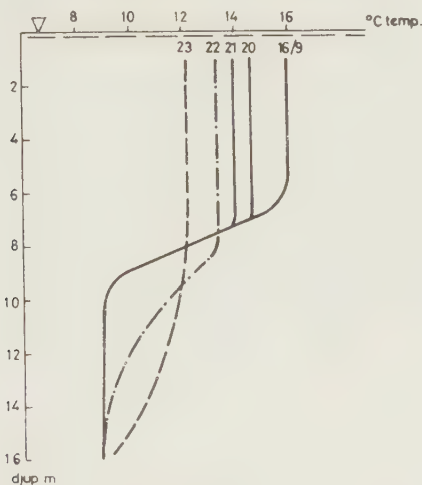


Fig. 10.3 Temperaturfördelning 16 - 23/9 1969

De blåsiga dagarna under höstarna 1969-70-71 har sammanställts nedan. Ett densimetriskt Froude-tal har beräknats med vinden som hastighet. Med strömhastigheten i termoklinen beräknad ur den deterministiska modellen, kapitel 7, erhålles ett annat densimetriskt Froude-tal, längst till höger i tabell 10.3. Båda Froude-talen har beräknats med h = sprängskiktsdjupet. Genom att i stället beräkna Froudetalen med termoklinens utbredning skulle dessa bli ungefär dubbelt så stora.

Tabell 10.3 Blåsiga dagar under 1969-70-71

datum	W	vind	h	ΔT	F_d	F_d
1969	m/s	riktn.	m	°C	(med W)	(med modell)
13.9	5,2	SSV	8	8	15	0,12
14.9	5,1	O`	8	7,5	15	0,08
19.9	4,4	NNO	8	6,5	15	0,12
20.9	3,2	N	8	6,0	11	0,09
21.9	2,4	-	8	5,5	8	0,05
22.9	11,0	S-V-NV	8	5,5	120	1,0
NEDBRYTNING						
<u>1970</u>						
4.9	8,5	V	8,5	8,0	24	0,12
5.9	6,5	V	8,5	7,5	19	0,10
6.9	6,2	N	8,5	6,5	20	0,17
NEDBRYTNING						
<u>1971</u>						
3.9	6,8	V	9	7,0	20	0,10
5.9	3,8	NV	9	6,5	16	0,12
7.9	1,9	N	9	6,5	5	0,04
8.9	2,0	O	9	6,0	6	0,03
9.9	7,8	S	9	6,0	25	0,21
NEDBRYTNING						
<u>stark sommarvind</u>						
22.7.70	10,0	V	7	8,0	33	0,16

Om det ur modellen beräknade Froude-talet är 0,17 eller större bryts språngskiktet ner. I alla händelser synes en differens av 7°C bilda en effektiv diffusionsspärr. Däremot kan en 6°C diskontinuitet brytas ner, om vinden är i sjöns längdriktning och starkare än 6 m/s.

Litteratur

1. Edinger och Geijer [1965]. Heat exchange in the environment. - Edison Electric Inst. pub 65-902, p. 17-59.
2. Harleman, D.R. [1969]. Thermal stratification in lakes: Analytical and laboratory studies. - Water Resources Res. 5 (2), p. 484-492.
3. Kato, H. och Phillips, O.M. [1969]. On the penetration of a turbulent layer into a stratified fluid. J. Fluid Mech. 37 (4), p. 643-655.
4. Li, T.Y. [1970]. Formation of thermocline in Great Lakes. - Proc. 13:th Conf. Great Lakes Res., p. 453-467.
5. Munk, W.H. och Anderson, E.R. [1948]. Notes on a theory of the thermocline. - J. Marine Res. 7, p. 276-295.
6. Taylor, G.I. [1960]. Internal waves and turbulence in a fluid of variable density. - The Scientific papers of G.I.T. edited by G.K. Batchelor, p. 240-247.
7. Turner, J.S. [1968]. The influence of molecular diffusivity on turbulent entrainment across a density interface. - J. Fluid Mech. 33 (4), p. 639-656.

Kapitel 11. SLUTSATSER

Strömcirkulationen i sjöar kan beskrivas med i det föregående redovisade matematiska modeller. Med kännedom om vindens hastighet och riktning samt en sjös bottenkonfiguration kan de av vinden orsakade stationära strömmarna på olika nivåer beräknas med hjälp av datamaskin.

I sjön Velen stämmer teoretiskt beräknade stationära och uppmätta strömmar överens. Vid beräkning av strömhastigheterna har hänsyn tagits till vattenytans lutning, jordens rotation samt turbulensen. Icke-linjära termer har försummats. Eftersom Velen har en oregelbunden konfiguration, kan man därför förvänta sig, att verkligheten beskrivs ännu bättre av modellerna, om en sjö har en mera regelbunden form.

Den stationära strömmingen bestäms av vindförhållanden, bottenkonfiguration, skikttningsförhållanden samt turbulensen. I ytskiktet påverkar jordrotationen strömmingen, under det att returströmmarna styrs av bottenens form. Vid kraftig omblandning känner strömmarna av botten och stora horisontella virvlar uppstår.

I realiteten befinner sig en sjö aldrig i ett stationärt tillstånd. En ändring av vindhastigheten följs emellertid snabbt av en ändring av strömhastigheterna. Ännu på 10 m djup är enligt ett examensarbete vid LTH tidsförskjutningen mellan vindens och strömhastighetens maximivärde mindre än 1 timme. Strömmarna hinna dock inte på någon nivå påverkas av korttidsvariationer i vinden. En sjö kan i praktiken anses befinna sig i stationärt tillstånd, om vinden har ungefär samma medelriktning och medelhastighet från en timme till en annan.

Även en modell, som beskriver den icke-stationära vindinducerade strömmingen, har framtagits, men beräkningarna är även för datamaskinen mycket tidskrävande. Modellen visar, att en sjö uppnår sitt fortvarighets-tillstånd någon timme efter det att vinden blivit stationär. Stationaritets tiden beror på sjöns djup.

Strömmar genereras av vinden genom att rörelsemängd överföres från vinden till vattenytan. Vindens skjuvande kraft på vattenytan kan relativt väl bestämmas ur ekvation (4.1) med släpkräftskoefficienten 0,0011. Mätningar över Velen visar, att vindkraften är jämnt fördelad över en sjö, även om denna är omgiven av höga träd.

Rörelsemängdsutbytet inom vattenmassorna sker i huvudsak genom den vertikala turbulensen, vars "styrka" tänkes kunna beskrivas med ett värde på den vertikala virvelviskositeten. Virvelviskositeten kan antagas vara proportionell mot vindstyrka och språngskiktsdjup enligt ekvation (6.9) med proportionalitetskonstanten $2 \cdot 10^{-2}$. Den horisontella turbulensen verkar utjämnande på strömmingen och förhindrar uppkomsten av lokala oregelbundenheter i strömmingen. Endast nära stränder och i grunda områden har den horisontella turbulensen någon betydelse. Den kan då införas i rörelseekvationerna som en horisontell friktionskoefficient ggr strömhastigheten enligt ekvation (3.19).

En sjö är i det närmaste tvåskiktad eller densitetshomogen, något som framgår av figur 2.2. Vid tvåskiktade vattenmassor är turbulensen dämpad i termoklinen, som kan betraktas som i det närmaste friktionsfri. För att vattnet under språngskiktet skall kunna cirkulera, måste rörelse-

mängd överförs från epilimnion till hypolimnion. Denna rörelsemängds-transport äger troligen rum, där termoklinen står i kontakt med sjöbotten.

Strömmarna i en sjö kan under ett helt år beräknas enligt nedan. Under hösten och den tid av vintern, då en sjö är isfri, beräknas strömmarna med en modell för homogena vattenmassor (kapitel 6.1.2). Endast vind och bottenkonfiguration behöver vara kända.

Vårceirkulationen omblandar hela sjöns vattenmassa. Efter cirka två veckor har ett sprängskikt bildats. Om sprängskiktsdjupet är känt, kan strömmarna i epilimnion bestämmas med en skiktad modell (kapitel 7.2.1), i vilken termoklinen betraktas som friktionsfri. Hypolimnionströmmarna bestämmas enligt kapitel 7.2.2.

Sprängskiktets nedträngning och därmed dess läge kan bestämmas utifrån vinddata. Nedträngningshastigheten är proportionell mot vindhastigheten i kubik och omvänt proportionell mot sprängskiktsdjupet och mot densitetsdifferensen mellan hypolimnion och epilimnion (ekv. 10.2). Ända fram till höstomblandningen kan därför den skiktade modellen användas med vinddata som enda erforderliga ingångsdata.

När höstavkylningen reducerat epilimnions temperatur, så att den endast är 60°C (i Velen) högre än hypolimnions, bryts sprängskiktet ner. Höstomblandningen sker snabbt, och redan efter en vecka kan strömmarna simuleras med en oskiktad modell.

Med endast tillgång till djupkarta samt antagande om vindar och det djup på vilket sprängskiktet utbildas är det meningen, att strömhastigheter under godtycklig tid på året skall kunna bestämmas. Nedträngningskonstanten i ekvation (10.2) varierar emellertid från en sjö till en annan, men borde kunna bestämmas för olika typer av sjöar. Mycket vindexponerade sjöar är även under sommaren densitetshomogena, vilket underlättar strömningsberäkningarna.

I sjöar grundare än 5 meter påverkar jordens rotation inte strömmarna. Då bör en modell med horisontell friktion (kapitel 6.1.3) användas. Även i vikar eller just intill stränder, dvs. där horisontella hastighetsgradienter är att förvänta, bör en modell med horisontell friktion användas. Friktionskoefficienten är cirka 10^{-4} s^{-1} . I mycket oregelbundna områden kan inte någon av modellerna förväntas beskriva verkligheten, eftersom fältaccelerationerna då får stor inverkan på strömningen. Hänsyn tas inte till inflödet av rörelsemängd från en älv, varför modellerna inte kan gälla just intill ett inflöde. Hänsyn tas dock till inflödet av vattenmassa.

Med kännedom om hastighetsfält och turbulenta förhållanden kan utspädningen av en förorening bestämmas. Diffusionsekvationen (5.1) kan användas. Diffusionskoefficienterna i ekvation (5.2) varierar med tiden och dessutom från ett tillfälle till ett annat. De är cirka $200 \text{ cm}^2/\text{s}$, $30 \text{ cm}^2/\text{s}$ och $5 \text{ cm}^2/\text{s}$ i strömriktningen, vinkelrät mot denna samt vertikalt. Olikformigheter i hastighetsfältet gör, att diffusionskoefficienten i longitudinell riktning är ständigt växande. Koefficienten kan då bestämmas med ekvation (5.30).

Utspädningen kan också simuleras med stokastiska modeller. Hastighetsfluktuationer och korrelationsfunktioner bestäms genom fältmätningar. Känner man dessutom hastighetsfältet, som kan bestämmas ur t.ex. modellen i kapitel 6.1.2, kan man med hjälp av datamaskin simulera hur 1000 partiklar sprids (ekv. 5.40-41-42). Simuleringsmetodens fördelar gentemot beräkningar med diffusionsekvationen är, att fältarbetet förenklas och att hänsyn på ett bättre sätt kan tagas till spridning på grund av olikformigt hastighetsfält.

De olika modellerna skulle t.ex. kunna användas för att studera, hur en utfyllnad av en del av en sjö kommer att påverka cirkulationen i sjön. Strömningen samt utspädningseffekten före och efter utfyllningen jämföres. Man kan då observera, om vattnet kommer att stå stilla i någon del av sjön, och om strömhastigheterna vid botten blir så stora, att erosion kommer att äga rum. Hastighetsfältet i sjön blir kanske olika före och efter utfyllningen. Med den stokastiska simuleringsmodellen (ekv. 5.42) kan man beräkna den förändrade utspädningseffekten.

Ett annat användningsområde vore att undersöka, om en vik kan mottaga någon form av utsläpp. Därvid bör ju vattenutbytet mellan viken och resten av sjön vara ganska stort. Man har inga möjligheter att göra strömmätningar och spridningsstudier för alla tänkbara yttre förhållanden. I stället kan man med modellerna studera, hur vattnet i viken cirkulerar för olika vindar.

